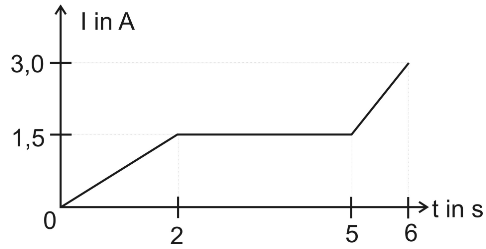
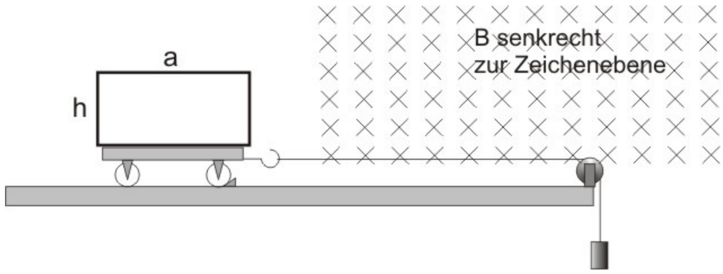
Aufgaben zum Induktionsgesetz

366. (Grundkurs 2009)



In einer 30 cm langen mit Luft gefüllten Spule 1 mit 4500 Windungen befindet sich eine Spule 2 mit 60 Windungen und der Querschnittsfläche 18 cm². Die Längsachsen der Spulen liegen parallel zueinander. Die Spule 1 ist an einer veränderbaren Spannungsquelle angeschlossen und der durch sie fließende Strom kann gemessen werden. Über der Spule 2 wird die Spannung gemessen.
Der Strom durch Spule 1 ist im I(t)-Diagramm dargestellt. Zeichnen Sie das zugehörige $U_{ind}(t)$-Diagramm.

376. (LK 2010)



Auf einer Horizontalen befindet sich ein Wagen zusammen mit einer kurzgeschlossenen rechteckigen Spule mit der Windungszahl N. Der Wagen kann durch einen an eine Schnur angehängten Hakenkörper in Bewegung versetzt und in ein homogenes zeitlich konstantes Magnetfeld hineingezogen werde.
Reibungsverluste und Selbstinduktion werden vernachlässigt.

- Masse des Wagens einschließlich Spule $m_W = 0{,}20$ kg
- Masse des Hakenkörpers $m_K = 0{,}10$ kg
- Ohmscher Widerstand der Spule R = 0,51 Ohm
- Höhe h jeder Windung h = 0,15 m
- Breite a jeder Windung a = 0,25 m
- Windungszahl der Spule N = 50
- Flussdichte des homogenen Magnetfeldes B = 0,20 T

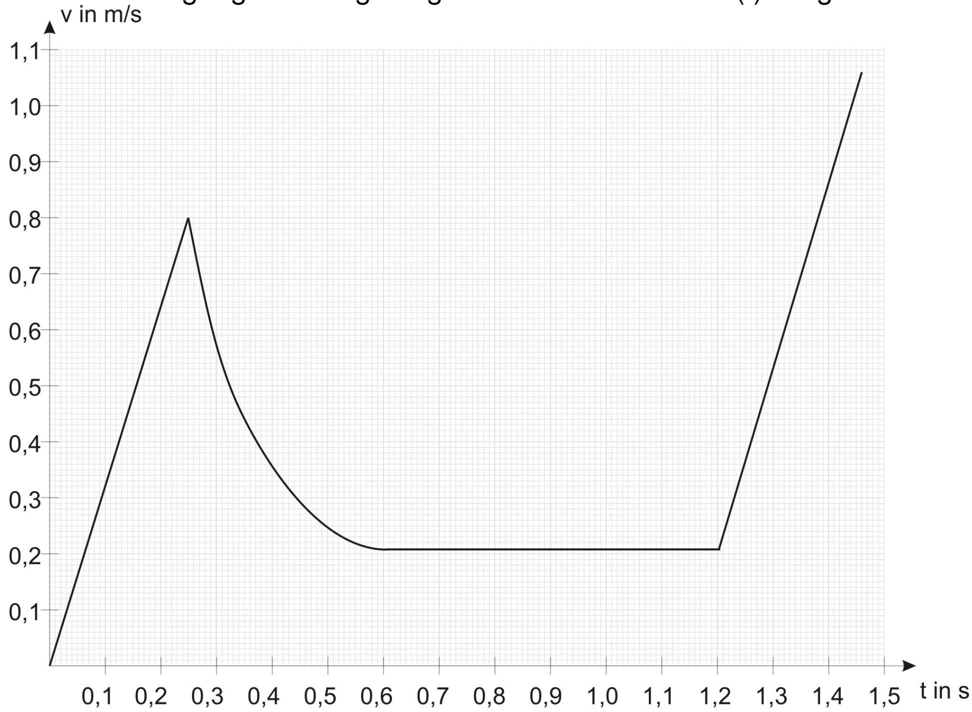
Die rechte Seite der Spule befindet sich genau 0,10 m vor dem Magnetfeld und ruht. Der Wagen wird zum Zeitpunkt t = 0 freigegeben und legt den Weg 0,50 m zurück.

a) Bestimmen Sie unter Nutzung des Diagramms die Zeitabschnitte, in denen die Beschleunigung

- konstant, aber ungleich Null,
- Null,
- nicht konstant ist.

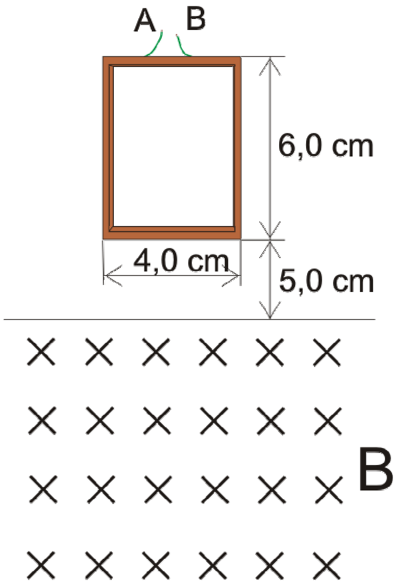
Lesen Sie aus dem Diagramm ab, zu welchem Zeitpunkt die rechte Seite der Spule das Magnetfeld erreicht und zu welchem Zeitpunkt die linke.
b) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Geschwindigkeit, die die Spule unmittelbar vor dem Eintritt ihrer rechten Seite in das Magnetfeld hat, ca. 0,8 m/s beträgt.
c) Das Diagramm zeigt, dass in einem bestimmten Zeitintervall die Geschwindigkeit des Wagens konstant ist.
Nennen Sie in Bezug auf dieses Zeitintervall die auf die Spule in horizontaler Richtung wirkende Kräfte und vergleichen Sie deren Beträge und Richtungen. Begründen Sie! Nutzen Sie dazu sowohl das Induktionsgesetz als auch die Lenzsche Regel und ein Newtonsches Gesetz.
d) Berechnen Sie für den Zeitpunkt t = 1,0 s die Stromstärke des in der Spule fließenden Induktionsstromes.

Für die Bewegung des Wagens gilt das nachstehende v(t)-Diagramm.



.

261. Eine rechteckige Spule mit 100 Windungen befindet sich 5,0 cm oberhalb eines homogenen, nach oben begrenzten Magnetfeldes. Die Anschlüsse A und B der Spule sind mit einem hochohmigen Spannungsmesser verbunden.
Die Spule wird mit der konstanten Geschwindigkeit 2,0 cm/s senkrecht nach unten in das Magnetfeld hinein bewegt. Dabei steht die Querschnittsfläche der Spule senkrecht auf den Feldlinien des Magnetfeldes, die in die Zeichenebene hineingehen.



Das Messgerät zeigt während des Eintauchvorgangs die Spannung 36 mV an.

a) Erklären Sie, warum eine Spannung auftritt und welche Polung an den Anschlüssen A und B vorhanden ist.

b) Zeigen Sie, dass der Betrag der magnetischen Flussdichte 0,45 T beträgt.

c) In einem zweiten Experiment befindet sich die Spule wieder 5,0 cm oberhalb des Magnetfeldes. Die Spule wird zur Zeit t_0=0s aus der Ruhe heraus losgelassen und fällt frei in das Magnetfeld hinein.
Stellen Sie für die Zeit von 0s bis 0,20s die am Messgerät angezeigte Spannung in einem t-U-Diagramm dar. Begründen Sie den Verlauf der Spannung.

Lösungen

366.
Zum Zeichen des Diagramms müssen für die drei erkennbaren Zeitabschnitte die Spannungen berechnet werden, die in der Spule 2 induziert werden.
Die Induktionsspannung berechnet sich ganz allgemein nach der Gleichung:

$$U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Da die Spulenachsen parallel liegen, gilt:

$$B \perp A$$

und das magnetische Feld ändert sich gleichmäßig. Es kann somit geschrieben werden:

$$U_{ind} = -N \cdot \frac{\Delta(B \cdot A)}{\Delta t}$$

B ist die magnetische Flussdichte und A der Querschnitt der Spule. Da die Spulen nicht bewegt werden, bleibt der vom Magnetfeld durchflossene Querschnitt gleich, es ändert sich für die Spule nur die Flussdichte. Deshalb kann die Gleichung für die Induktionsspannung weiter vereinfacht werden:

$$U_{ind} = -N \cdot A \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

Die Windungszahl und die Fläche der Spule 2 sind bekannt. Die magnetische Flussdichte erhält man über die Spule 1, die ja das Magnetfeld erzeugt.
Allgemein berechnet sich die Flussdichte mit:

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{N \cdot I}{\ell}$$

Die Spule enthält Luft, damit ist μ_0 = 1 und kann in der Gleichung weg gelassen werden. µr ist Permeabilität, N die Windungszahl, I der fließende Strom und ℓ die Länge der Spule.

Die Analyse des Diagramms zeigt, dass sich der Strom und damit das Magnetfeld in den ersten beiden Sekunden und von der 5. zur 6. Sekunde ändert. Damit ändert sich in diesen Zeitabschnitten auch das Magnetfeld und in Spule 2 wird eine Spannung induziert. Zwischen der 2. und 6. Sekunde ist der Strom und damit das Magnetfeld konstant und es wird keine Spannung induziert.
Wie groß ist das Magnetfeld nach der 2. Sekunde?

$$B = 1{,}256 \cdot 10^{-6}\ V \cdot s \cdot A^{-1} \cdot m^{-1} \cdot \frac{4500 \cdot 1{,}5A}{0{,}3m}$$

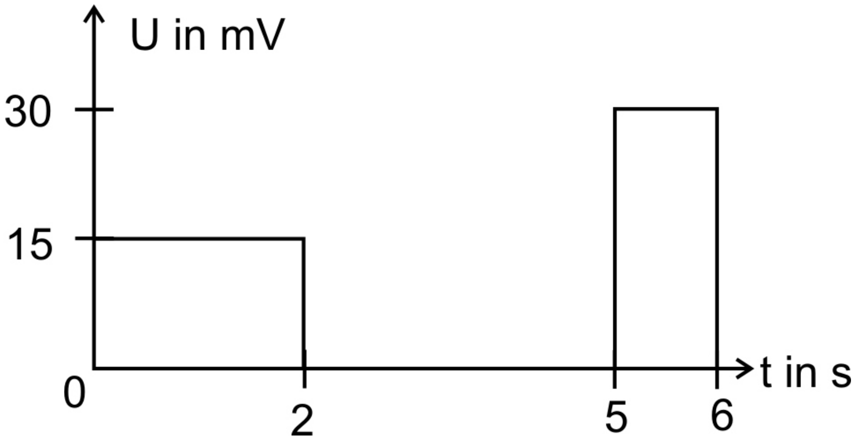
$$B = 28{,}26\,mT$$

Mit dieser Flussdichte kann nun die Spannung berechnet werden, die im ersten Teil entsteht. Die Änderung der Flussdichte entspricht genau diesem berechnet wert, da sie zu Beginn 0 war.
Als Windungszahl muss jetzt natürlich die der Spule 2 eingesetzt werden.

$$U_{ind} = -60 \cdot 18 \cdot 10^{-4}\,m^2 \cdot \frac{28{,}26 \cdot 10^{-3}\,T}{2s}$$

$$U_{ind} = 0{,}015\,V$$

In der letzten Sekunde ändert sich die magnetische Flussdichte wieder um 28,26 mT, da sich der absolute Wert verdoppelt. ($B \sim I$) Da dieser Vorgang in nur einer Sekunde abläuft, ist die entstehende Spannung doppelt so groß ($U_{ind} \sim \frac{1}{t}$).



376. a) – konstant, aber nicht Null: Die Geschwindigkeit ändert sich gleichmäßig, v~t
0 s ... 0,25 s
1,2 s ... 1,45 s

- Null: Die Geschwindigkeit bleibt gleich
0,6 s ... 1,2 s

- nicht konstant: Die Geschwindigkeit ändert sich ungleichmäßig
0,25 s ... 0,6 s

Die rechte Seite erreicht nach 0,25 s das Magnetfeld. Bis dahin erfolgt die Bewegung gleichmäßig beschleunigt, wird als nur durch das Gewicht beschleunigt. Ab 0,25 s taucht die Spule in das Magnetfeld ein und wird durch die Selbstinduktion abgebremst.
Nach 0,6 s ist die Kraft, die durch die Selbstinduktion entsteht, genau so groß wie die Kraft, mit der das Gewicht am Wagen zieht. Damit bewegt sich der Wagen gleichförmig weiter.
Die linke Seite taucht nach 1,2 s in die Spule ein. In der Spule wird jetzt keine Spannung induziert und der Wagen bewegt sich wie vorher gleichmäßig beschleunigt weiter.

b) Der Wagen wird bis zum Eintritt in das Magnetfeld einfach nur gleichmäßig beschleunigt. Es wirkt nur die konstante Kraft des Hakenkörpers.
Die Geschwindigkeit ist gesucht und es gilt für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung:

$$v = a \cdot t$$

Nun ist aber weder die Beschleunigung a noch die Zeit t für diese Bewegung bekannt, beide müssen erst noch bestimmt werden.
Da die Kraft konstant ist, gilt das Newtonsche Grundgesetz:

$$F = m \cdot a$$

F ist die Kraft, die durch den Hakenkörper erzeugt wird und m die Masse, die beschleunigt wird. Das ist aber die Masse des Wagens plus die Masse des Hakenkörpers zusammen!
Damit ist

$$F = m_K \cdot g$$

und

$$m = m_W + m_K$$

Die Beschleunigung a lässt sich dann so schreiben:

$$F = m \cdot a$$

$$a = \frac{F}{m}$$

$$a = \frac{m_K \cdot g}{m_W + m_K}$$

Die Zeit kann aus den Gesetzen der Kinematik abgeleitet werden:

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2$$

$$t^2 = \frac{2 \cdot s}{a}$$

Damit wird aus der ursprünglichen Gleichung für die Geschwindigkeit:

$$v^2 = a^2 \cdot t^2$$

$$v^2 = a^2 \cdot \frac{2 \cdot s}{a}$$

$$v^2 = 2 \cdot s \cdot a$$

$$v = \sqrt{2 \cdot s \cdot a}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot s \cdot \frac{m_K \cdot g}{m_W + m_K}}$$

In diese Gleichung können die gegebenen Größen eingesetzt werden:

$$v = \sqrt{2 \cdot 0{,}10\,m \cdot \frac{0{,}10\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}}{0{,}20\,kg + 0{,}10\,kg}}$$

$$v = 0{,}81\,\frac{m}{s}$$

c) Die Geschwindigkeit bleibt in der Zeit zwischen 0,6s und 1,2s konstant. Die Beschleunigung ist demnach Null. Nach dem Newtonschen Grundgesetz

$$F = m \cdot a$$

bedeutet dass, das in dieser Zeit die Summe aller Kräfte auf den Wagen ebenfalls Null sein muss, da die Masse ja einen vorgegebenen Wert hat.
Auf den Wagen wirkt die Kraft des Gewichtes in die Richtung der Bewegung. Damit die Summe der Kräfte Null wird, muss eine gleich große Kraft in die entgegen gesetzter Richtung wirken. Diese Kraft wird durch die Induktion hervorgerufen:
Der Wagen mit der Leiterschleife bewegt sich im Magnetfeld. Dadurch wird nach dem Induktionsgesetz im rechten, senkrechten Teil der Schleife eine Spannung induziert, die einen Strom fließen lässt. Dieser Strom erzeugt selbst ein Magnetfeld, das mit dem äußeren Magnetfeld in Wechselwirkung tritt.
Nach der Lenzschen Regel ist der Strom nun so gerichtet, dass er der Ursache der Induktion entgegen wirkt. Die Ursache der Induktion ist aber die Bewegung des Wagens. Das Magnetfeld, das durch den Induktionsstrom erzeugt wird, wirkt mit dem äußeren Magnetfeld so, dass es die Bewegung abbremst. Es wirkt eine Kraft entgegen der Bewegung des Wagens.
Wenn die Spule vollständig in das Magnetfeld eingetaucht ist, wird im vorderen und hinteren Teil der Spule die gleiche Spannung induziert, so dass in der Spule kein Strom fließt und die Geschwindigkeit wieder zunimmt.

d) Zu der angegebenen Zeit hat der Wagen eine konstante Geschwindigkeit und befindet sich vollständig im Magnetfeld. Wie in der vorangehenden Aufgabe erklärt wurde, wirkt auf den Wagen eine Gegenkraft zu der Kraft des Gewichtes. Diese Gegenkraft ist die Lorentzkraft, also die Kraft auf einen stromführenden Leiter im Magnetfeld. Diese Lorentzkraft muss so groß sein wie die Kraft, die durch das Gewicht auf den Wagen wirkt.

$$F_L = F_G$$

Die Lorentzkraft ist

$F_L = B \cdot \ell \cdot I$

also Flussdichte mal Länge des Leiters mal Stromstärke. Die Stromstärke ist die gesuchte Größe.

Damit wird:

$B \cdot \ell \cdot I = m \cdot g$

$$I = \frac{m \cdot g}{B \cdot \ell}$$

Die Länge des Leiters sind die Stücke der Spule, die sich senkrecht zu den Feldlinien bewegen und zuerst in die Spule eintauchen. Es gilt:

$\ell = N \cdot h$

Damit kann der Strom berechnet werden:

$$I = \frac{m \cdot g}{B \cdot N \cdot h}$$

$$I = \frac{0{,}10\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0{,}20\,\mathrm{T} \cdot 50 \cdot 0{,}15\,\mathrm{m}}$$

$I = 0{,}65\,\mathrm{A}$

261. a) Wenn die Spule in das Magnetfeld eintaucht, bewegen sich die Elektronen der unteren Seite des Rechtecks senkrecht zu den Magnetfeldlinien. Dabei spüren sie die Lorentzkraft.

Mit der Linke-Hand-Regel kann die Richtung der Kraft bestimmt werden:

Daumen = Richtung der Elektronen = nach unten

Zeigefinger = Magnetfeld = in die Zeichenebene hinein

Mittelfinger = Richtung der Kraft = links

Damit entsteht am Anschluss A ein Elektronenüberschuss, also Minus und am Anschluss B ein Elektronenmangel, also Plus.

Die Elektronen in den senkrechten Teilen der Spule spüren zwar auch die Lorentzkraft und bewegen sich nach links, da das aber quer zum Draht erfolgt, tragen sie zur Spannung nicht bei.

Wenn die Spule vollständig eingetaucht ist, bewegen sich die Elektronen im oberen, waagerechten Teil der Spule auch nach links und heben den Effekt des unteren Teils auf. Damit verschwindet die Spannung wieder.

b)

geg.:	$N=100$ $b=0{,}040\,m$ $h=0{,}06\,m$ $v=0{,}020\,\frac{m}{s}$ $U_{ind}=0{,}036\,V$ $B=0{,}45\,T$	ges.:	B
Lösung:	b) Die Elektronen werden durch die Lorentzkraft zur Seite gedrängt: $F_L=B\cdot e\cdot v$ B soll berechnet werden, e ist die Elementarladung und bekannt und v ist die Geschwindigkeit, mit der die Spule bewegt wird. Was fehlt, ist die Größe der Lorentzkraft. Nun würden sich durch die Lorentzkraft alle Elektronen zur Seite bewegen. Da sie aber negativ geladen sind, lassen sie sich nicht so einfach auf einen Haufen kehren. Sie stoßen sich ab und bauen eine Gegenkraft zur Lorentzkraft auf. So richtig zufrieden sind alle, wenn Kräftegleichgewicht herrscht. Die zur Lorentzkraft entgegenwirkende Kraft ist die Kraft des elektrischen Feldes der Elektronen. Es gilt die Definitionsgleichung für die Feldstärke: $E=\frac{F_{el}}{e}$ $F_{el}=E\cdot e$ Ist das Feld homogen, was hier angenommen werden kann, gilt: $F_{el}=\frac{U}{b}\cdot e$ Nun kann man gleichsetzen: $F_L=F_{el}$ $B\cdot e\cdot v=\frac{U}{b}\cdot e$ $B=\frac{U}{b\cdot v}$ Das würde für eine Windung gelten. Da aber 100 Windungen auf der Spule sind und jede Windung einen Teil zur Gesamtspannung beiträgt, muss noch durch die Windungszahl geteilt werden: $B=\frac{U}{n\cdot b\cdot v}$ Und eingesetzt: $B=\frac{0{,}036\,V}{100\cdot 0{,}04m\cdot 0{,}020\,\frac{m}{s}}$ $B=0{,}45\,T$		

c)

geg.:		ges.:	

Solange die Spule außerhalb des Magnetfeldes ist, wird keine Spannung induziert. Nach 5,0 cm Fallweg tritt die Spule in das Magnetfeld ein und im unteren Teil wird eine Spannung induziert.

$U_{ind} = n \cdot B \cdot d \cdot v_1$

Außer der Geschwindigkeit ist alles bekannt. Die lässt sich mit den Gesetzen des freien Falls berechnen:

$s = \frac{g}{2} \cdot t^2$ und $v = g \cdot t$

Daraus wird:

$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}}$

$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}05\,m}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}}$

$t_1 = 0{,}10\,s$

Mit dieser ersten Fallzeit kann die Geschwindigkeit beim Eintritt ins Magnetfeld berechnet werden:

$v_1 = g \cdot t_1$

$v_1 = 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}10\,s$

$v_1 = 0{,}981\,\frac{m}{s}$

Damit wir die Spannung genau zu Beginn des Eintauchvorgangs berechnet:

$U_{ind1} = 100 \cdot 0{,}45\,T \cdot 0{,}04\,m \cdot 0{,}981\,\frac{m}{s^2}$

$U_{ind1} = 1{,}8\,V$

Diese Spannung steigt aber sofort weiter an, da die Geschwindigkeit der Spule größer wird. Die Geschwindigkeit wächst proportional mit der Zeit, so dass nur die Endspannung berechnet werden muss. Dazwischen steigt die Spannung ebenfalls proportional zur Zeit.

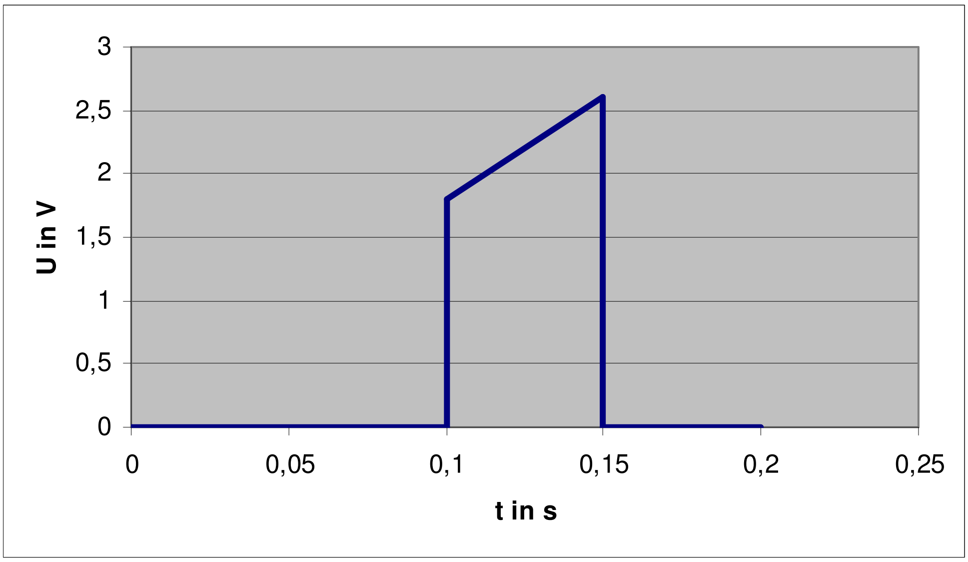
Die Spannung steigt bis die obere Spulenkante das Magnetfeld erreicht hat. Dann wird im oberen Spulenteil eine Spannung induziert, die die untere Spannung kompensiert.

$t_2 = 0{,}15\,s$

$v_2 = 1{,}47\,\frac{m}{s}$

Damit lässt sie die Endspannung berechnen:

$U_{ind2} = 2{,}6\,V$


3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
U in V
0
0,05
0,1
0,15
0,2
0,25
t in s