Aufgaben zu den Würfen

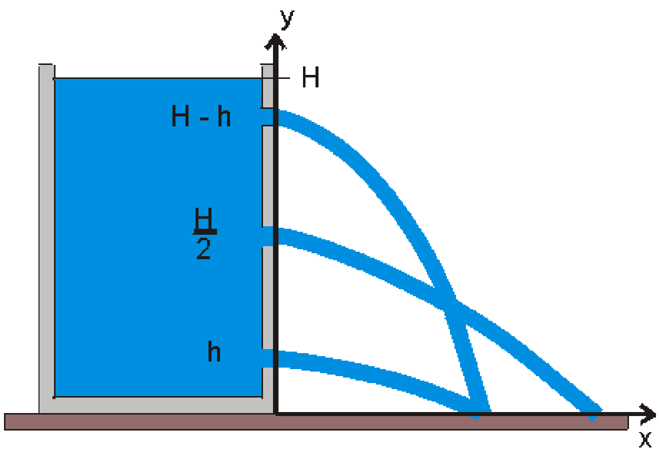
Aufgaben

1. Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit v_0 = 18 ms^{-1} nach oben geworfen. Vom Luftwiderstand sehe man ab.
Berechnen Sie die Wurfhöhe und die Zeit bis zum Erreichen des höchsten Punktes der Bahn.
Berechnen Sie die Wurfzeit und die Auftreffgeschwindigkeit.

2. Ein Stein fällt aus der Höhe h = 8 m senkrecht zur Erde. Gleichzeitig wird von unten ein zweiter Stein mit der Geschwindigkeit v_0 = 13 ms^{-1} senkrecht hoch geworfen.
a) Nach welcher Zeit und in welcher Höhe fliegen die beiden Steine aneinander vorbei?
b) In welchem zeitlichen Abstand treffen die beiden Steine auf dem Boden auf?
c) Welche Anfangsgeschwindigkeit müßte der zweite Stein haben, wenn beide zu gleicher Zeit auf dem Boden auftreffen sollen?

3. Ein Ball soll von einem Startpunkt so in eine 6.0 m entfernte und 1,5 m über dem Startpunkt gelegene Öffnung geworfen werden, dass er dort waagerecht ankommt. Wie groß müssen Abwurfwinkel und Abwurfgeschwindigkeit sein? (Es gilt: 2 sinα cosα = sin 2α)

4.
In eine Dose wurden drei Löcher gebohrt, eines in Höhenmitte und die anderen beiden symmetrisch dazu.
Berechne:
a) die Ausflussgeschwindigkeit v
b) die Gleichung der Auswurfparabel
c) die Wurfweite w
Beweise:
d) dass w für ½ H maximal ist
e) dass w(H-h) = w(h)



5. Zur Gartenbewässerung wird in einem Behälter, der 3000 l fasst, Regenwasser aufgefangen und mit Hilfe einer Pumpe und einem Halbzollschlauch zu den bedürftigen Pflanzen geleitet. Hält man den Schlauch in Höhe des Erdbodens und spritzt schräg nach oben, trifft der Strahl in maximal 63 cm Entfernung auf den Boden. Wieviel Liter Wasser kommen pro Minute zu den Pflanzen?
(Der störende Einfluss des Luftwiderstandes wird vernachlässigt, so dass die Bahn des Wasserstrahl eine Wurfparabel ist)

6.
Eine Kugel soll auf in einer 200 m entfernten Burg den Pulverturm in 20 m Höhe treffen. Die Kanone schießt die Kugel mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 70 m/s ab. Wie groß muss der Abschusswinkel sein?

Lösungen:
1.

geg.:	$v_0 = 18\,m\,s^{-1}$	ges.:	s_h, t_h, t_g, v
Lösung:	Beim senkrechten Wurf berechnet sich die Wurfhöhe : $s_h = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$ $s_h = \frac{18^2\,m^2\,s^{-2}}{2 \cdot 9{,}81\,m\,s^{-2}}$ $s_h = 16{,}5\,m$ Die dafür benötigte Zeit ist: $t_h = \frac{v_0}{g}$ $t_h = \frac{18\,m\,s^{-1}}{9{,}81\,m\,s^{-2}}$ $t_h = 1{,}83\,s$ Die Wurfzeit ist die doppelte Zeit, die bis zum Gipfelpunkt benötigt wird, also 3,6 s. Da der senkrechte Wurf symmetrisch ist, ist die Auftreffgeschwindigkeit genau so groß wie die Abwurfgeschwindigkeit, nur eben in der entgegengesetzten Richtung.		
Antwort:	Der Körper fliegt 16,5 m hoch und benötigt dafür 1,8 s. Er fliegt insgesamt 3,6 s und kommt mit 18 m/s unten wieder an.		

2.

geg.:

$$h = 8\,m$$

$$v_0 = 13\,\tfrac{m}{s}$$

ges.:

$$t, s$$

Lösung:

a) Beide Körper treffen sich zum Zeitpunkt t, bis dahin sind beide die gleiche Zeit unterwegs. Der Weg des einen plus der Weg des anderen ergibt zusammen die Gesamthöhe von 8 m.

$$s_1 + s_2 = h$$

$$t_1 = t_2$$

Die Bewegung 1 sei der freie Fall von oben nach unten, die Bewegung 2 der senkrechte Wurf von unten nach oben. Damit kann man die Weg-Zeit-Gesetze aufstellen:

$$s_1 = \frac{g}{2} \cdot t_1^2$$

$$s_2 = v_0 \cdot t_2 - \frac{g}{2} \cdot t_2^2$$

In die erste Gleichung über die Wege eingesetzt ergibt das:

$$h = \frac{g}{2} \cdot t_1^2 + v_0 \cdot t_2 - \frac{g}{2} \cdot t_2^2$$

Da die beiden Zeiten gleich sind, kann man den ersten gegen den letzen Summanden kürzen:

$$h = v_0 \cdot t$$

$$t = \frac{h}{v_0}$$

$$t = \frac{8\,m}{13\,\frac{m}{s}}$$

$$t = 0{,}615\,s$$

Die Höhe über dem Boden berechnet sich aus dem Weg-Zeit-Gesetz des senkrechten Wurfes:

$$s_2 = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$s_2 = 13\,\tfrac{m}{s} \cdot 0{,}615\,s - \frac{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}{2} \cdot 0{,}615^2\,s^2$$

$$s_2 = 6{,}14\,m$$

Die beiden Körper treffen sich 6,14 m über dem Boden.
Zur Probe kann man noch den Fallweg des anderen Körpers berechnen:

$$s_1 = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$s_1 = \frac{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}{2} \cdot 0{,}615^2\,m^2$$

$$s_1 = 1{,}86\,m$$

Beide Wege zusammen sind wieder 8 m.

b)
Es werden die einzelnen Flugzeiten berechnet.
1. Für den freien Fall:

$$s = \frac{g}{2} \cdot t_1^2$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{16\,m}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}}$$

$$t_1 = 1{,}28\,s$$

2. Für den senkrechten Wurf:
Die gesamte Flugdauer ist das doppelte der Steigzeit.

$$t_2 = \frac{2 \cdot v_0}{g}$$

$$t_2 = \frac{26\,\frac{m}{s}}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}$$

$$t_2 = 2{,}96\,s$$

Der zeitliche Abstand zwischen dem Auftreffen beider Steine beträgt damit:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$\Delta t = 2{,}96\,s - 1{,}28\,s$$

$$\Delta t = 1{,}68\,s$$

c) Die gesamte Flugdauer des zweiten Steines muss der Flugdauer des ersten Steines entsprechen:

$$t_2 = \frac{2 \cdot v_0}{g}$$

$$v_0 = \frac{t_1 \cdot g}{2}$$

$$v_0 = 6{,}28\,\frac{m}{s}$$

3.

<table>
<tr><td>geg.:</td><td>$s_h = 1{,}5\,m$
$\frac{s_w}{2} = 6\,m$</td><td>ges.:</td><td>α, v</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Lösung:</td><td colspan="2">Wurfweite beim schrägen Wurf:
$s_w = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g}$
$v_0^2 = \frac{s_w \cdot g}{\sin(2\alpha)}$</td><td>Wurfhöhe beim schrägen Wurf:
$s_h = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g}$
$v_0^2 = \frac{s_h \cdot 2 \cdot g}{\sin^2 \alpha}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Gleichsetzen der beiden Gleichungen und nach dem Winkel umstellen:
$\frac{s_w \cdot g}{\sin(2\alpha)} = \frac{s_h \cdot 2 \cdot g}{\sin^2 \alpha}$
$\frac{\sin(2\alpha)}{\sin^2 \alpha} = \frac{s_w}{2 \cdot s_h}$
$\frac{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha \cdot \sin\alpha} = \frac{s_w}{2 \cdot s_h}$
$\cot\alpha = \frac{s_w}{4 \cdot s_h}$
$\tan\alpha = \frac{4 \cdot s_h}{s_w}$
$\underline{\alpha = 26{,}6°}$
Für die Berechnung der Abwurfgeschwindigkeit kann man eine der beiden Gleichungen für v_0 verwenden.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$v_0^2 = \frac{s_w \cdot g}{\sin(2\alpha)}$
$v_0 = 12\,\frac{m}{s}$</td><td>$v_0^2 = \frac{s_h \cdot 2 \cdot g}{\sin^2 \alpha}$
$v_0 = 12\,\frac{m}{s}$</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>Antwort:</td><td colspan="3">Der Abwurfwinkel muss 26,6 ° sein, die Abwurfgeschwindigkeit beträgt 12 m/s.</td></tr>
</table>

4. a) Die kinetische Energie des ausfließenden Wassers ist gleich der potenziellen Energie vom Wasserspiegel H bis zur Ausflussöffnung in Höhe s.

$$E_{kin} = E_{pot}$$

$$\frac{m}{2} \cdot v^2 = m \cdot g \cdot (H - s)$$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - s)}$$

Diese Geschwindigkeit entspricht der Geschwindigkeit, die ein Körper hätte, wenn er aus der Höhe (H – s) frei fallen würde.

b) Die Gleichung der Ausflussparabel ist die Gleichung für einen waagerechten Wurf mit der Anfangshöhe s und der Abwurfgeschwindigkeit aus a).

$$y = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2} \cdot x^2 + s$$

$$y = -\frac{g}{2 \cdot 2 \cdot g \cdot (H - s)} \cdot x^2 + s$$

$$y = -\frac{1}{4 \cdot (H - s)} \cdot x^2 + s$$

c) Die Gleichung für die Wurfparabel wird zur Berechnung der Wurfweite benutzt. Der Wasserstrahl erreicht den Boden bei y = 0. Dann ist w = x.

$$0 = -\frac{1}{4 \cdot (H - s)} \cdot w^2 + s$$

$$s = \frac{1}{4 \cdot (H - s)} \cdot w^2$$

$$w = \sqrt{4 \cdot (H - s) \cdot s}$$

d) Es soll gezeigt werden, dass w für s = ½ H maximal wird. Das Maximum der Wurfweite liegt vor, wenn die 1. Ableitung der Wurfweite den Wert 0 hat.

$$w = \sqrt{4 \cdot (H - s) \cdot s}$$

$$w' = \frac{H - 2 \cdot s}{\sqrt{s \cdot (H - s)}}$$

$$0 = \frac{H - 2 \cdot s}{\sqrt{s \cdot (H - s)}}$$

$$0 = H - 2 \cdot s$$

$$2 \cdot s = H$$

$$s = \frac{H}{2}$$

e) Es gilt s = H - h und s = h

$$w = \sqrt{4 \cdot (H - s) \cdot s}$$

$$w = \sqrt{4 \cdot (H - (H - h)) \cdot (H - h)}$$

$$w = \sqrt{4 \cdot h \cdot (H - h)}$$

$$w = \sqrt{4 \cdot (H - h) \cdot h}$$

5.

geg.:

$d = \frac{1}{2}"$

$s_w = 0{,}63\,m$

$\alpha = 45°$

ges.:
V

Lösung:
Die bei Durchmessern von Rohren und Schläuchen übliche Angabe in Zoll muss in cm umgerechnet werden. Es gilt:

$1 Zoll = 1" = 1 inch = 25{,}4\,mm$

Damit hat ein Halbzollschlauch einen Durchmesser von 12,7 mm.
Zur Berechnung der Menge, die in einer Minute aus dem Schlauch läuft, muss man die Austrittsgeschwindigkeit wissen. Damit kann berechnet werden, wieviel Meter Schlauch in einer Minute leerlaufen. Über den Durchmesser wird noch die Querschnittsfläche des Schlauches berechnet und damit erhält man das gesuchte Volumen.
Der Flug des Wasserstrahls kann als schräger Wurf betrachtet werden. Da Abwurf- und Auftreffstelle in gleicher Höhe liegen, erreicht man bei einem Abwurfwinkel von 45° die maximale Weite.
Die Gleichung zur Beschreibung der Wurfparabel lautet:

$$y = \tan\alpha \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2$$

In dieser Gleichung sind alle Größen außer die Abwurfgeschwindigkeit bekannt. Also muss nach dieser umgestellt werden. Da die Abwurf- und Auftreffstelle gleich sind, ist y=0.

$$y = \tan\alpha \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2$$

$$y - \tan\alpha \cdot x = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2$$

$$\frac{x^2}{y - \tan\alpha \cdot x} = -\frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha}{g}$$

$$\frac{x^2 \cdot g}{(y - \tan\alpha \cdot x) \cdot 2 \cdot \cos^2\alpha} = -v_0^2$$

$$v_0 = \sqrt{-\frac{x^2 \cdot g}{(y - \tan\alpha \cdot x) \cdot 2 \cdot \cos^2\alpha}}$$

$$v_0 = \sqrt{-\frac{0{,}63^2\,m^2 \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}}{(0\,m - \tan 45° \cdot 0{,}63\,m) \cdot 2 \cdot \cos^2 45°}}$$

$$v_0 = 2{,}48\,\frac{m}{s}$$

Das Wasser spritzt also mit 2,48 m/s oder etwa 8,94 km/s aus dem Schlauch.
In einer Minute sind das 149 m Schlauch, die leer laufen.
Der Querschnitt des Schlaues ist kreisrund, so dass er sich wir folgt berechnen lässt:

$$A = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$$

$$A = \frac{\pi}{4} \cdot \left(12{,}7 \cdot 10^{-3}\,m\right)^2$$

$$A = 1{,}27 \cdot 10^{-4}\,m^2$$

$$A = 1{,}27\,cm^2$$

Multipliziert man diese Fläche (in Metern!) mit der Länge der Wassersäule aus der ersten Berechnung, erhält man die Wassermenge, die in einer Minute aus dem Schlauf läuft:

$$V = A \cdot l$$

$$V = 1{,}27 \cdot 10^{-4}\,m^2 \cdot 149\,m$$

$$V = 0{,}0189\,m^3$$

$$V = 18{,}9\,l$$

Hinweis: Die Aufgaben lässt sich auch lösen, wenn man die Gleichung für die Wurfweite beim schrägen Wurf verwendet. Sie leitet sich ja aus der allgemeinen Gleichung her.

Antwort:
In der Minute werden 19 Liter Wasser gepumt. Das sind in der Stunde etwa 1140 l. Im Prospekt der Pumpe werden 2800 l in einer Stunde versprochen, da ist aber nicht berücksichtigt, das bei mir der Schlauch eine Länge von 40 m hat.

6.

geg.:

$$s = 200\,m$$

$$h = 20\,m$$

$$v_0 = 70\,\frac{m}{s}$$

ges.:

α

Lösung:

Die Bewegungsgleichung für den schrägen Wurf in x-Richtung (=s) lautet:

$$s = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha$$

und in y-Richtung (=h)

$$h = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Mit der letzen Gleichung erhält man:

$$h = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$h + \frac{g}{2} \cdot t^2 = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{v_0 \cdot t} + \frac{g \cdot t^2}{2 \cdot v_0 \cdot t}$$

$$\sin\alpha = \frac{2 \cdot h}{2 \cdot v_0 \cdot t} + \frac{g \cdot t^2}{2 \cdot v_0 \cdot t}$$

$$\sin\alpha = \frac{2 \cdot h + g \cdot t^2}{2 \cdot v_0 \cdot t}$$

Da in der ersten Gleichung aber der Cosinus gefordert ist, muss man umschreiben:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot h + g \cdot t^2}{2 \cdot v_0 \cdot t}\right)^2}$$

Das setzt man in die erste Gleichung ein:

$$s = v_0 \cdot t \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot h + g \cdot t^2}{2 \cdot v_0 \cdot t}\right)^2}$$

und stellt es nach t um.

$$s^2 = v_0^2 \cdot t^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{2 \cdot h + g \cdot t^2}{2 \cdot v_0 \cdot t}\right)^2\right)$$

$$s^2 = v_0^2 \cdot t^2 - \frac{v_0^2 \cdot t^2 \cdot (2 \cdot h + g \cdot t^2)^2}{(2 \cdot v_0 \cdot t)^2}$$

$$s^2 = v_0^2 \cdot t^2 - \frac{(2 \cdot h + g \cdot t^2)^2}{4}$$

$$s^2 = v_0^2 \cdot t^2 - \left(\frac{2 \cdot h + g \cdot t^2}{2}\right)^2$$

$$s^2 = v_0^2 \cdot t^2 - \left(h + \frac{1}{2} g \cdot t^2\right)^2$$

$$s^2 = v_0^2 \cdot t^2 - h^2 - h \cdot g \cdot t - \frac{1}{4} g^4 \cdot t^4$$

$$s^2 + h^2 = t^2 \cdot \left(v_0^2 - h \cdot g - \frac{1}{4} g^4 \cdot t^2\right)$$

Ja, wie weiter? Man wählt jetzt:

$$t^2 = x$$

und kommt zu einer quadratischen Gleichung:

$$s^2 + h^2 = v_0^2 \cdot x - h \cdot g \cdot x - \frac{1}{4} \cdot g^2 \cdot x^2$$

$$0 = -\frac{1}{4} \cdot g^2 \cdot x^2 + (v_0^2 - h \cdot g) \cdot x - (s^2 + h^2)$$

Nun könnte man das in eine Normalform umwandeln und lösen. Man kann aber auch erst mal Zahlen einsetzen. Das vereinfacht gewaltig:

$$0 = -24{,}06\,x^2 + 4703{,}8\,x - 404000$$

$$0 = x^2 - 195{,}5\,x + 1679{,}1355$$

$$x_{1/2} = 97{,}7515 \pm \sqrt{9555{,}347 - 1679.1355}$$

$$x_{1/2} = 97{,}7515 \pm 88{,}748$$

$$x_1 = 186{,}4995$$

$$x_2 = 9{,}01$$

Das sind aber noch nicht die gesuchten Zeiten. Die Zeiten ergeben sich aus:

$$t = \sqrt{x}$$

$$t_1 = 13{,}6565\,s$$

$$t_2 = 3{,}001s$$

Mit diesen Zeiten kann man über die erste Gleichung die Abschusswinkel berechnen:

$$s = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{s}{v_0 \cdot t}$$

$$\alpha_1 = 77{,}92^\circ$$

$$\alpha_2 = 17{,}8^\circ$$

Schnell noch die Probe. Wenn alles richtig war, muss sich mit der zweiten Gleichung die Höhe von 20 m berechnen lassen:

$$h = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$h_1 = 20{,}0\,m$$

$$h_2 = 20{,}04\,m$$

Stimmt und fertig.

Antwort:
Die Kugel kann unter einem Winkel von 77.92° oder von 17,8° abgeschossen werden.