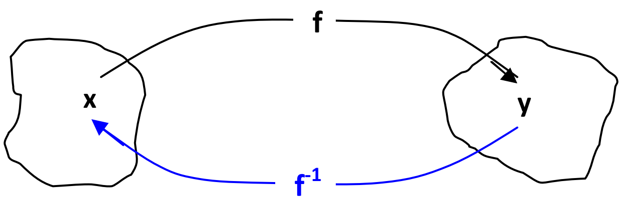
Definition

Gegeben sei eine Funktion **f** : $D_f \rightarrow W_f$ mit Definitionsbereich D_f und Wertebereich W_f.

Die ***Umkehrfunktion*** $f^{-1}: D_f^{-1} \rightarrow W_f^{-1}$ zu der **Funktion f** ist die Funktion, die jedem Element $y \in W_f$ sein **eindeutig bestimmtes** Urbildelement $x \in D_f$ zuweist.



$D_f = W_f^{-1}$ $W_f = D_f^{-1}$

$y = f(x)$

$x = f^{-1}(y)$

Definition

Eine Funktion, deren Umkehrfunktion existiert, wird als ***umkehrbar*** bezeichnet.

Beispiel: Sei **A** = {a,b,c,d,...,y,z} die Menge der 26 Buchstaben des lateinischen Alphabets und sei **B** = {1,2,3,4,...,25,26}.

Die Funktion **f: A → B** ordnet jedem Buchstaben die entsprechende Nummer im Alphabet zu. f(a) = 1 $D_f = A$ f(b) = 2 ... $W_f = B$ f(z) = 26	Die Umkehrfunktion $f^{-1}: B \rightarrow A$ ordnet jeder Nummer den entsprechenden Buchstaben im Alphabet zu. $f^{-1}(1) = a$ $D_f^{-1} = B$ $f^{-1}(2) = b$ ... $W_f^{-1} = A$ $f^{-1}(26) = z$

Für den Buchstaben **b** ∈ A liefert f also zum Beispiel: f(**b**) = **2**, d.h. **b** ist der zweite Buchstabe im Alphabet. Die Umkehrfunktion f^{-1} liefert für die Nummer **2** ∈ B: f^{-1}(**2**) = **b**, d.h. der zweite Buchstabe im Alphabet ist **b**.

Dieses Beispiel zeigt auch: Wegen $\underline{f(\mathbf{b}) = \mathbf{2}}$ ∧ $f^{-1}(\mathbf{2}) = \mathbf{b}$ ist $f^{-1}(\mathbf{2}) = f^{-1}(f(\mathbf{b})) = \mathbf{b}$

einfügen

Allgemein gilt:

1. $f^{-1}(f(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$

2. $\mathbf{D_f}^{-1} = \mathbf{W_f}$ und $\mathbf{W_f}^{-1} = \mathbf{D_f}$

3. Ist $\mathbf{f^{-1}}$ die Umkehrfunktion zu einer Funktion **f**, dann ist **f** auch Umkehrfunktion zu $\mathbf{f^{-1}}$.

4. Eine Funktion f ist umkehrbar genau dann, wenn es zu zwei verschiedenen Stellen x_1 und x_2 aus dem Definitionsbereich auch zwei unterschiedliche Funktionswerte $f(x_1)$ und $f(x_2)$ aus dem Wertebereich gibt. Das heißt f ist umkehrbar, wenn gilt:
   $x_1, x_2 \in D_f$ und $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ oder, was gleichbedeutend Ist:
   $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

5. Aus Punkt 4. ergibt sich direkt:
   a) Eine über D_f streng monoton steigende (bzw. fallende) Funktion f ist umkehrbar.
   b) Die Umkehrfunktion f^{-1} einer streng monoton steigenden (bzw. fallenden) Funktion f ist ebenfalls streng monoton steigend (bzw. fallend).

Rezept: Berechnung der Umkehrfunktion

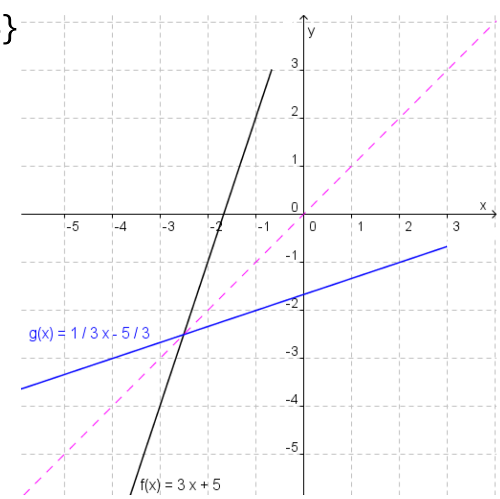
1. Prüfen, ob die Funktion über dem Definitionsbereich umkehrbar ist. Falls nicht, den Definitionsbereich – wenn möglich – entsprechend einschränken.

2. $y = f(x)$ nach x auflösen

3. Die Variablen x und y vertauschen.

4. Definitionsbereich und Wertebereich der Umkehrfunktion bestimmen.

Beispiel: $f(x) = 3x + 5$, $x \leq 3$, d.h. $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$



1. Da f eine streng monoton steigende Funktion ist, ist f umkehrbar. Für den größten x-Wert x=3 ergibt sich: $f(3) = 3 \cdot 3 + 5 = 14$. Also ist $W_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 14\}$

2. $y = 3x + 5 \quad | -5$
   $y - 5 = 3x \quad | :3$
   $\frac{1}{3}y - \frac{5}{3} = x$ (Seiten vertauscht: $x = \frac{1}{3}y - \frac{5}{3}$)

3. $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$, also $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$

4. $D_f^{-1} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 14\}$ ($= W_f$)
   $W_f^{-1} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 3\}$ ($= D_f$)

Aufgaben
Gib von folgenden Funktionen den Wertebereich bei gegebenem Definitionsbereich an, bilde falls möglich die Umkehrfunktion. Gib hierfür wieder Definitionsbereich und Wertebereich an. Zeichne Funktion und Umkehrfunktion in ein Koordinatensystem.

1) $g(x) = 2{,}5\,x^3$, $D_f = \mathbb{R}$

2) $g(x) = 2\,x^2 + 1$, $D_f = \mathbb{R}^-$

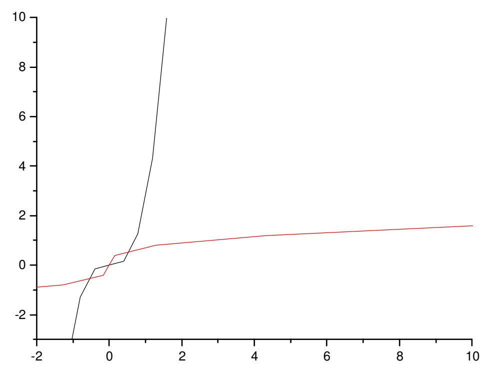
3) $g(x) = 2\,x^2 + 1$, $D_f = D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$

Lösung

1) $W_g\ \{y \geq -20\}$

$$\begin{aligned} y &= 2{,}5x^3 && \mid : 2{,}5 \\ \frac{2}{5}y &= x^3 && \mid \sqrt[3]{\ } \\ \sqrt[3]{\frac{2}{5}y} &= x \\ f^{-1}(x) &= \sqrt[3]{\frac{2}{5}x} \end{aligned}$$

$W_{f^{-1}}\{y \geq -2\} \qquad D_{f^{-1}}\{x \geq -20\}$

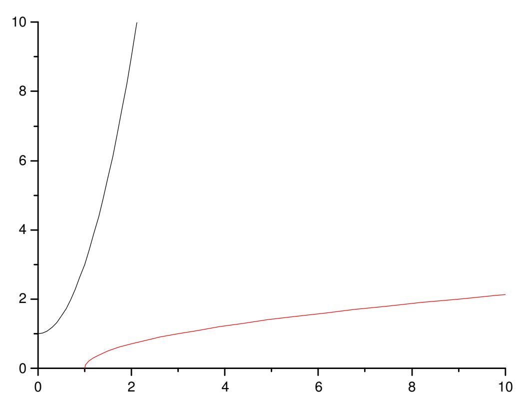


2) $W_h\ \{y \geq 1\}$

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 1 && \mid -1 \\ y - 1 &= 2x^2 && \mid : 2 \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} &= x^2 && \mid \sqrt{\ } \\ \sqrt{\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}} &= x \end{aligned}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$$

$W_{f^{-1}}=\{y \geq 0\} \qquad D_{f^{-1}}=\{x \geq 1\}$



3) $W_h\ \{y \leq 5\}$

$$
\begin{aligned}
y &= -(x+2)^2 + 5 && \big| -5 \\
y-5 &= -(x+2)^2 && \big| \cdot(-1) \\
-y+5 &= (x+2)^2 && \big| \sqrt{} \\
\sqrt{-y+5} &= x+2 && \big| -2 \\
\sqrt{-y+5}-2 &= x && \\
f^{-1}(x) &= \sqrt{-x+5}-2 &&
\end{aligned}
$$

$W_{f^{-1}}\ \{y \geq -2\} \qquad D_{f^{-1}}\ \{x \leq 5\}$