Arbeitsblatt 1 - Umkehrfunktionen

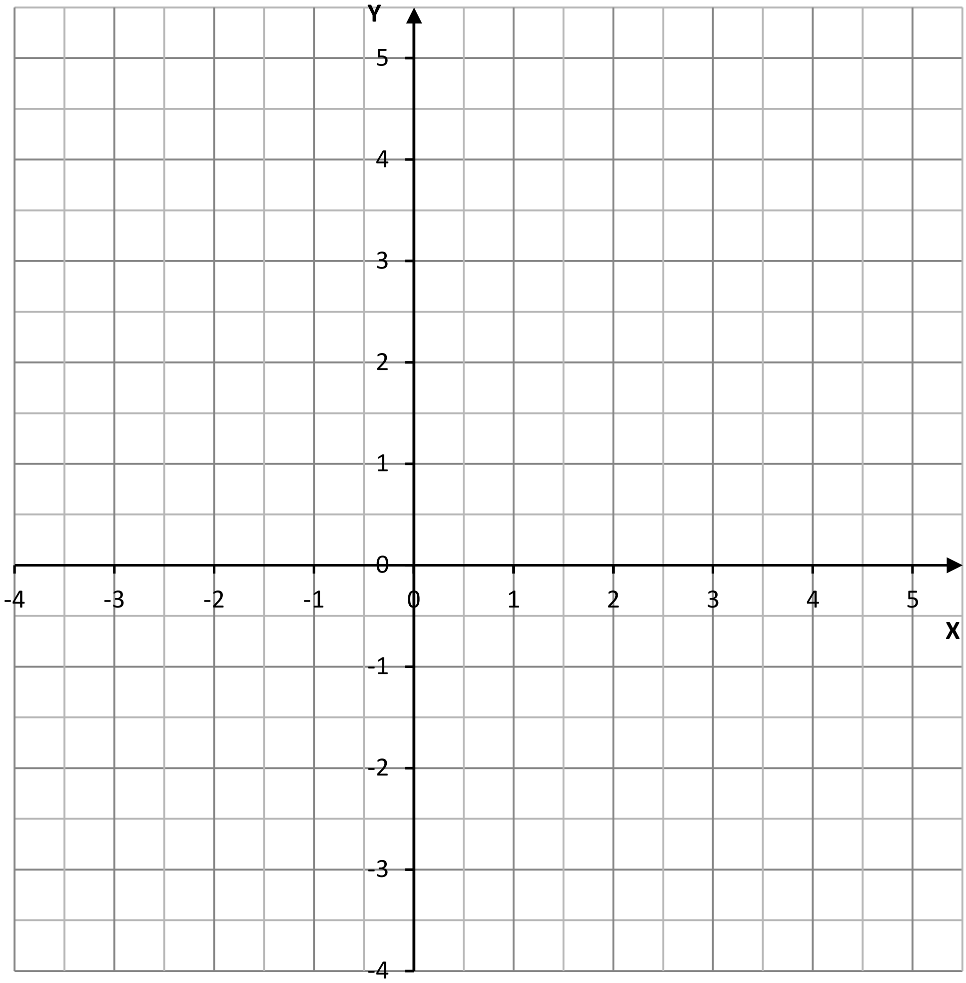
1. Gegeben sind die beiden linearen Funktionen $f_1(x) = -2x + 4$ und $f_2(x) = 2x - 3$.

(a) Zeichnen Sie beide Funktionsbilder ein!

(b) Bestimmen Sie rechnerisch die beiden Umkehrfunktionen!

(c) Zeichnen Sie die Graphen der Umkehrfunktionen ein!

(d) Stellen Sie für die einander entsprechenden Funktionen und Umkehrfunktionen folgende Merkmale gegenüber: Definitions-, Wertebereich, Achsenschnittpunkte, Monotonie!



Arbeitsblatt 2 - Umkehrfunktionen

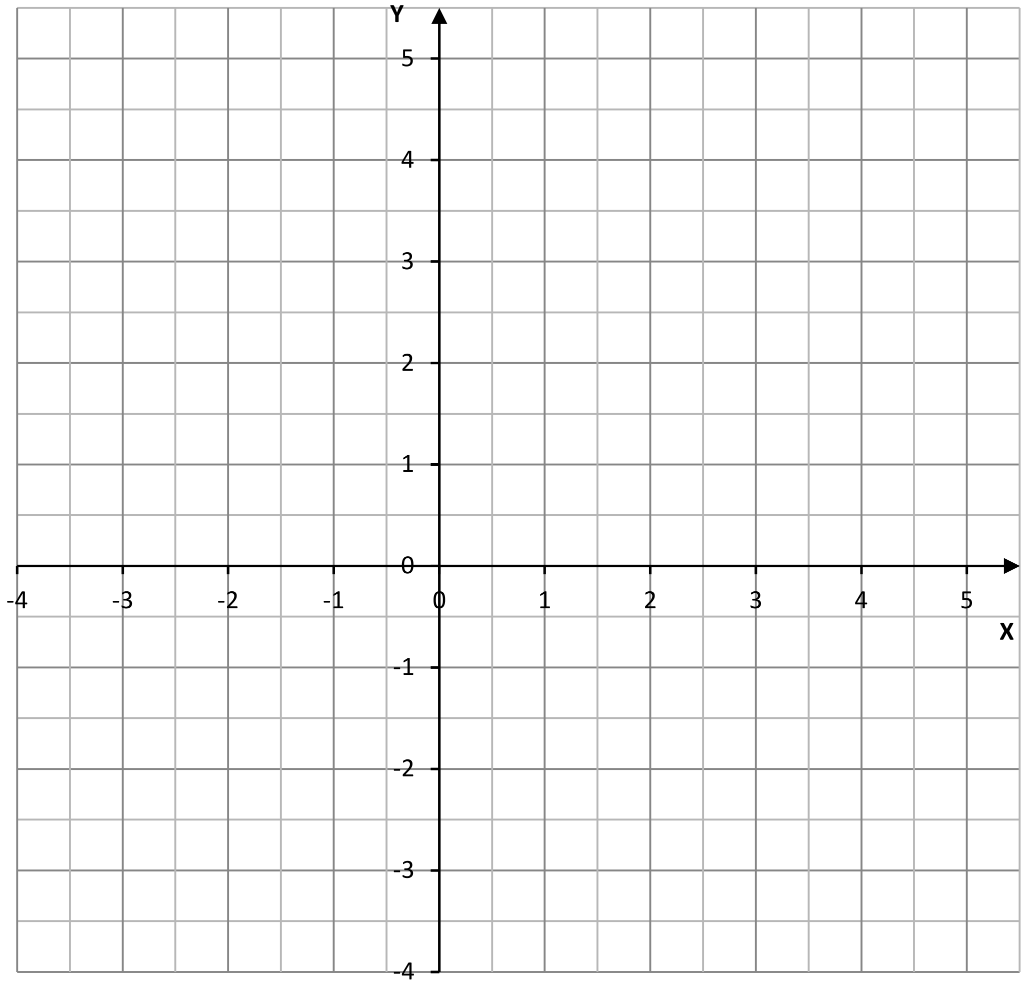
2. Gegeben sind die quadratische Funktion $f_3(x) = (x+2)^2 - 3$ und die Wurzelfunktion $f_4(x) = \sqrt{4-x} - 1$.

(a) Zeichnen Sie beide Funktionsbilder ein!

(b) Bestimmen Sie rechnerisch die beiden Umkehrfunktionen!

(c) Zeichnen Sie die Graphen der Umkehrfunktionen ein!

(d) Stellen Sie für die einander entsprechenden Funktionen und Umkehrfunktionen folgende Merkmale gegenüber: Definitions-, Wertebereich, Achsenschnittpunkte, Monotonie!



Arbeitsblatt 3 - Umkehrfunktionen

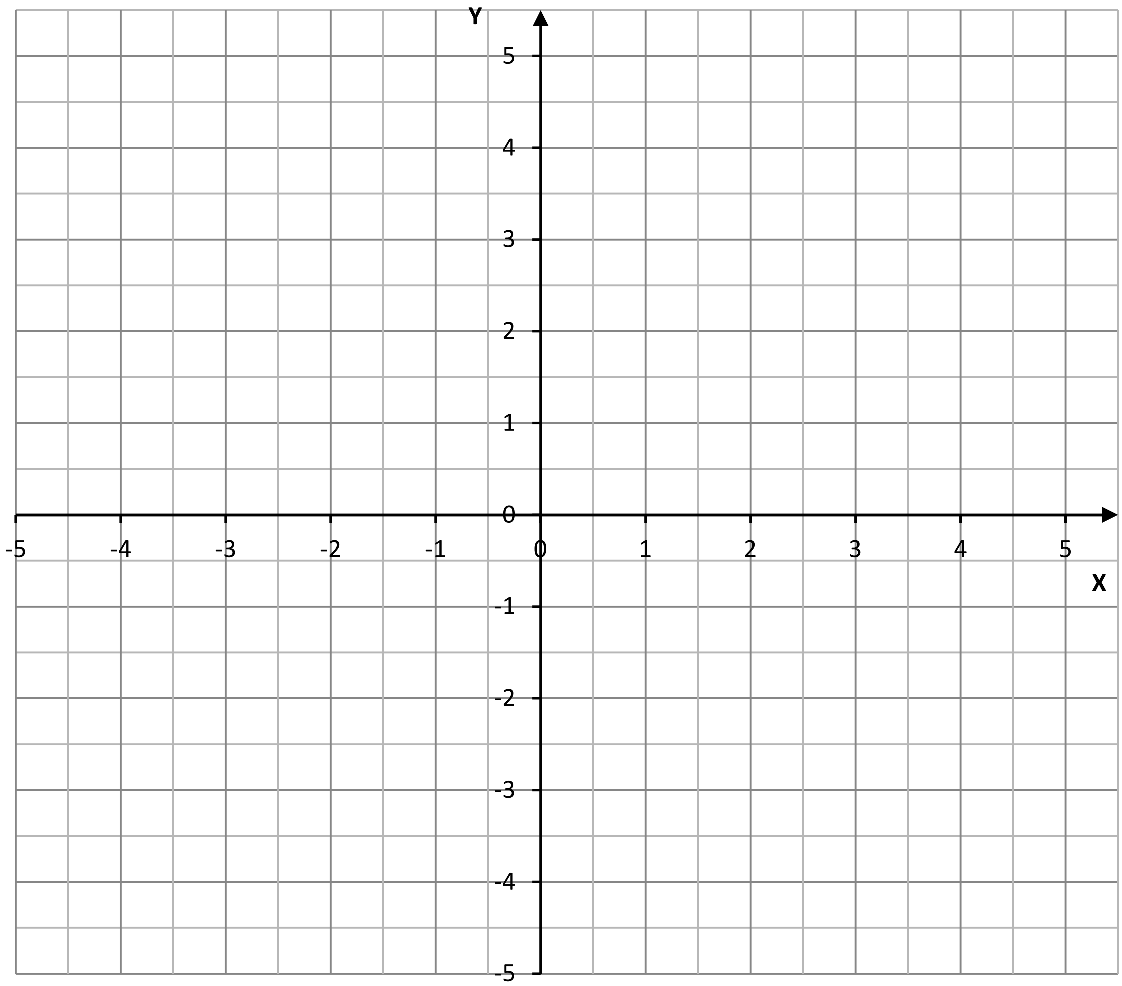
3. Gegeben sind die kubische Funktion $f_5(x) = (x-2)^3 - 1$ und die Wurzelfunktion $f_6(x) = \sqrt[3]{2-x} - 1$.

(a) Zeichnen Sie beide Funktionsbilder ein!

(b) Bestimmen Sie rechnerisch die beiden Umkehrfunktionen!

(c) Zeichnen Sie die Graphen der Umkehrfunktionen ein!

(d) Stellen Sie für die einander entsprechenden Funktionen und Umkehrfunktionen folgende Merkmale gegenüber: Definitions-, Wertebereich, Achsenschnittpunkte, Monotonie!



Arbeitsblatt 4 - Umkehrfunktionen

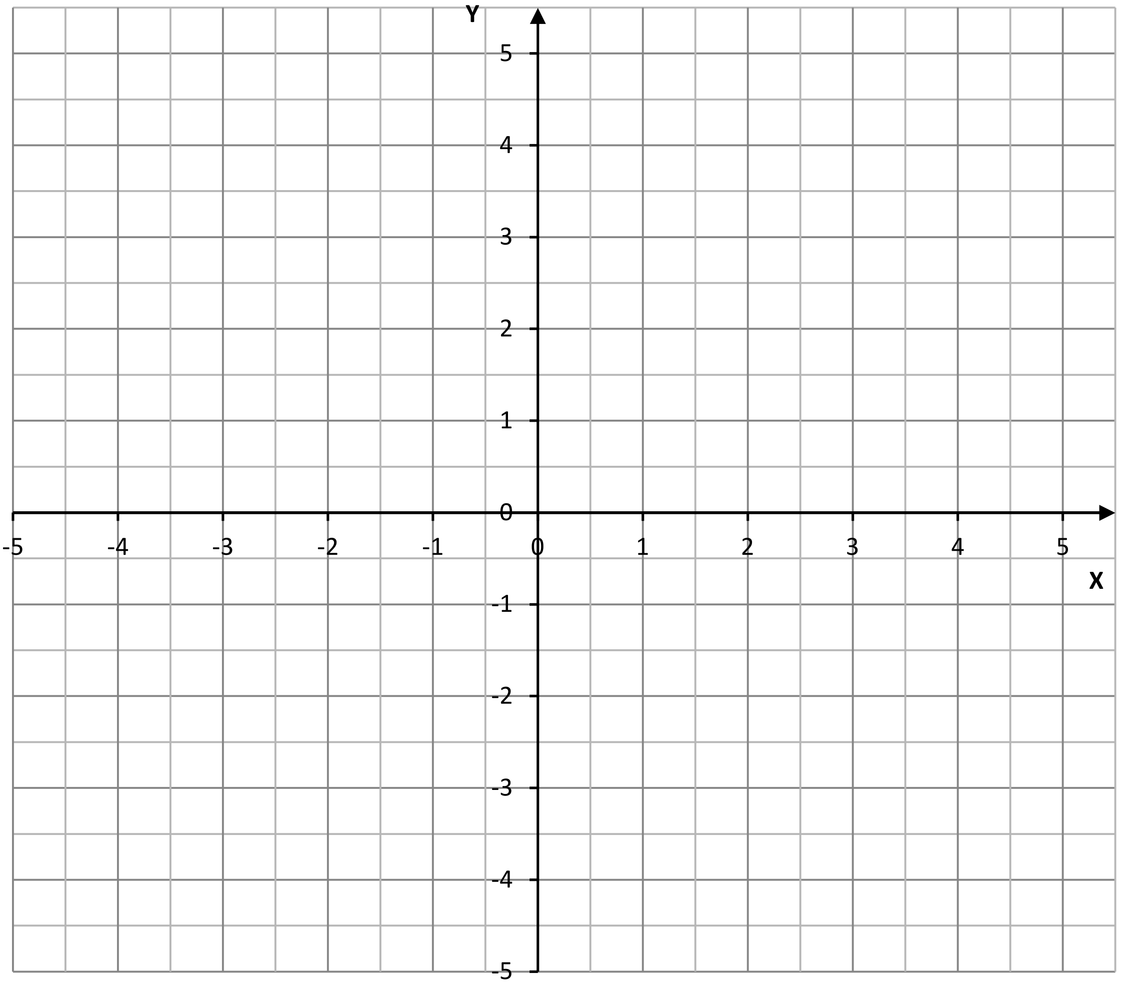
4. Gegeben sind die beiden Hyberbelfunktionen $f_7(x) = (x+1)^{-2} - 1$ und $f_8(x) = (x-1)^{-1} + 1$.

(a) Zeichnen Sie beide Funktionsbilder ein!

(b) Bestimmen Sie rechnerisch die beiden Umkehrfunktionen!

(c) Zeichnen Sie die Graphen der Umkehrfunktionen ein!

(d) Stellen Sie für die einander entsprechenden Funktionen und Umkehrfunktionen folgende Merkmale gegenüber: Definitions-, Wertebereich, Achsenschnittpunkte, Monotonie!



Arbeitsblatt 5 - Umkehrfunktionen

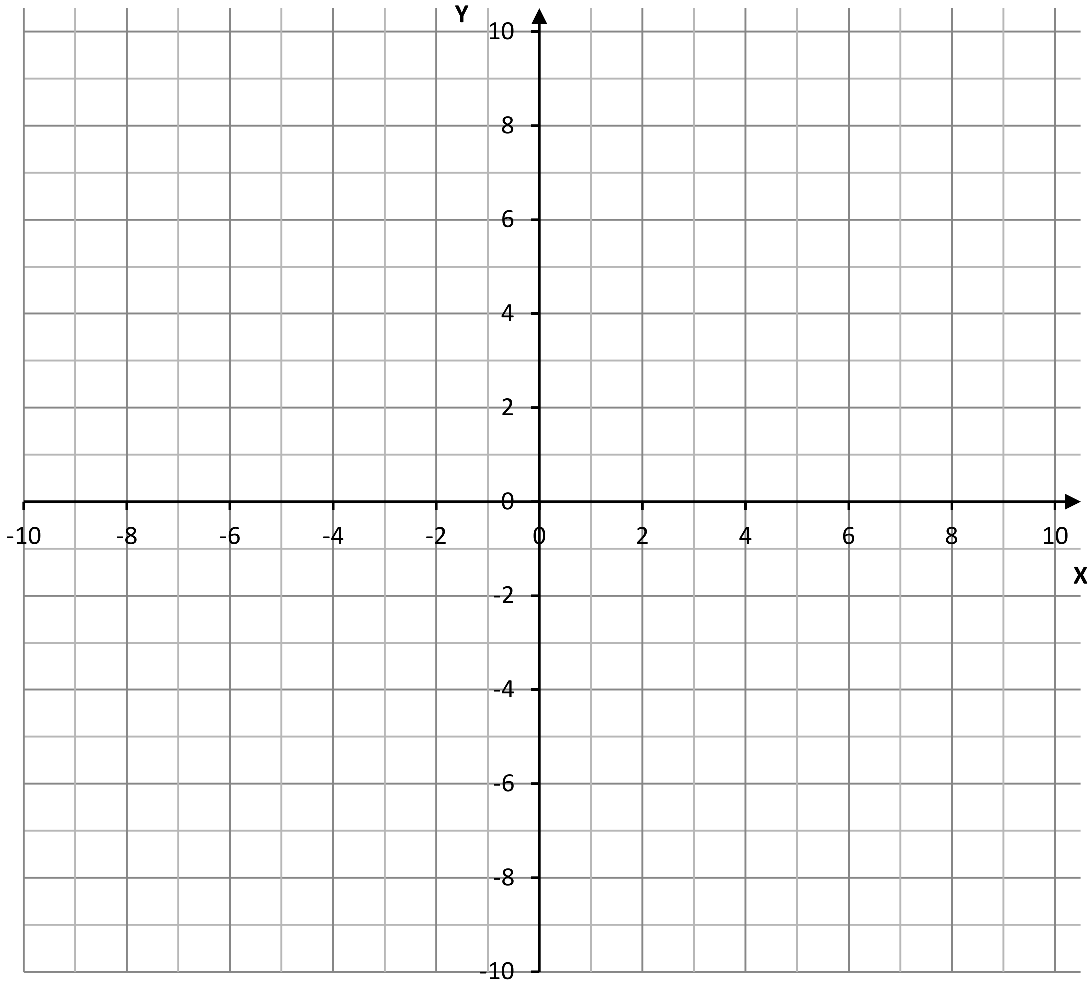
5. Gegeben sind die Exponentialfunktion $f_9(x) = e^{x-2} - 3$ und die Logarithmusfunktion $f_{10}(x) = \log_2(x+2) + 1$.

(a) Zeichnen Sie beide Funktionsbilder ein!

(b) Bestimmen Sie rechnerisch die beiden Umkehrfunktionen!

(c) Zeichnen Sie die Graphen der Umkehrfunktionen ein!

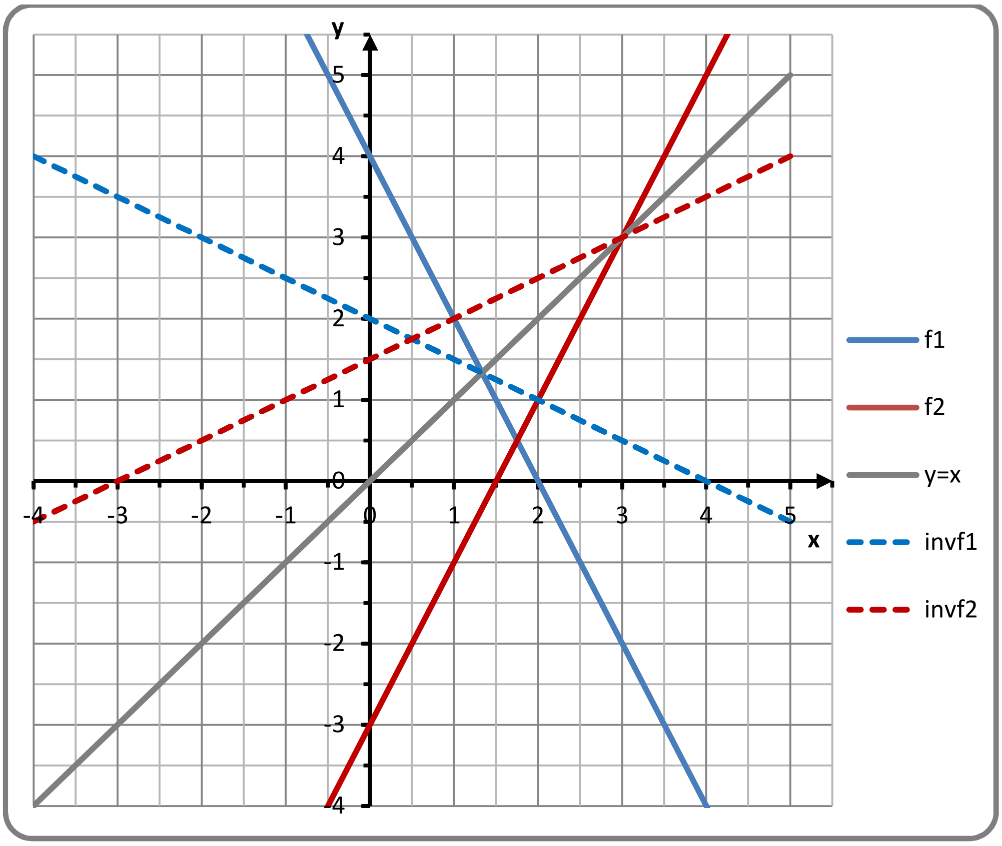
(d) Stellen Sie für die einander entsprechenden Funktionen und Umkehrfunktionen folgende Merkmale gegenüber: Definitions-, Wertebereich, Achsenschnittpunkte, Monotonie!



Lösungen - Umkehrfunktionen

1. Gegeben sind die beiden linearen Funktionen $f_1(x) = -2x + 4$ und $f_2(x) = 2x - 3$.
(a) Zeichnen Sie beide Funktionsbilder ein!
(b) Bestimmen Sie rechnerisch die beiden Umkehrfunktionen!
(c) Zeichnen Sie die Graphen der Umkehrfunktionen ein!
(d) Stellen Sie für die einander entsprechenden Funktionen und Umkehrfunktionen folgende Merkmale gegenüber: Definitions-, Wertebereich, Achsenschnittpunkte, Monotonie!

(a) + (c)



(b)

Funktion	$\boldsymbol{y = f_1(x) = -2x + 4}$	$\boldsymbol{y = f_2(x) = 2x - 3}$
Austausch $(y \leftrightarrow x)$	$x = -2y + 4$	$x = 2y - 3$
Umstellen nach y	$x - 4 = -2y$	$x + 3 = 2y$
Umkehr-funktion	$\boldsymbol{y = f_1^{-1}(x) = -0,5x + 2}$	$\boldsymbol{y = f_2^{-1}(x) = 0,5x + 1,5}$

(d)

Funktion	$\boldsymbol{f_1(x) = -2x + 4}$	$\boldsymbol{f_1^{-1}(x) = -0,5x + 2}$
Definitionsbereich	$D(f_1) = \mathrm{R}$	$D(f_1^{-1}) = \mathrm{R}$
Wertebereich	$W(f_1) = \mathrm{R}$	$W(f_1^{-1}) = \mathrm{R}$
Achsenschnittpunkte	$S_x(f_1) = (2\|0)$ $S_y(f_1) = (0\|4)$	$S_x(f_1^{-1}) = (4\|0)$ $S_y(f_1^{-1}) = (0\|2)$
Monotonie	streng monoton fallend	

Funktion	$\boldsymbol{f_2(x) = 2x - 3}$	$\boldsymbol{f_2^{-1}(x) = 0,5x + 1,5}$
Definitionsbereich	$D(f_2) = \mathrm{R}$	$D(f_2^{-1}) = \mathrm{R}$
Wertebereich	$W(f_2) = \mathrm{R}$	$W(f_2^{-1}) = \mathrm{R}$
Achsenschnittpunkte	$S_x(f_2) = (1{,}5\vert 0)$ $S_y(f_2) = (0\vert -3)$	$S_x(f_2^{-1}) = (-3\vert 0)$ $S_y(f_2^{-1}) = (0\vert 1{,}5)$
Monotonie	streng monoton wachsend	

2. Gegeben sind die quadratische Funktion $f_3(x) = (x+2)^2 - 3$ und die Wurzelfunktion $f_4(x) = \sqrt{4-x} - 1$.

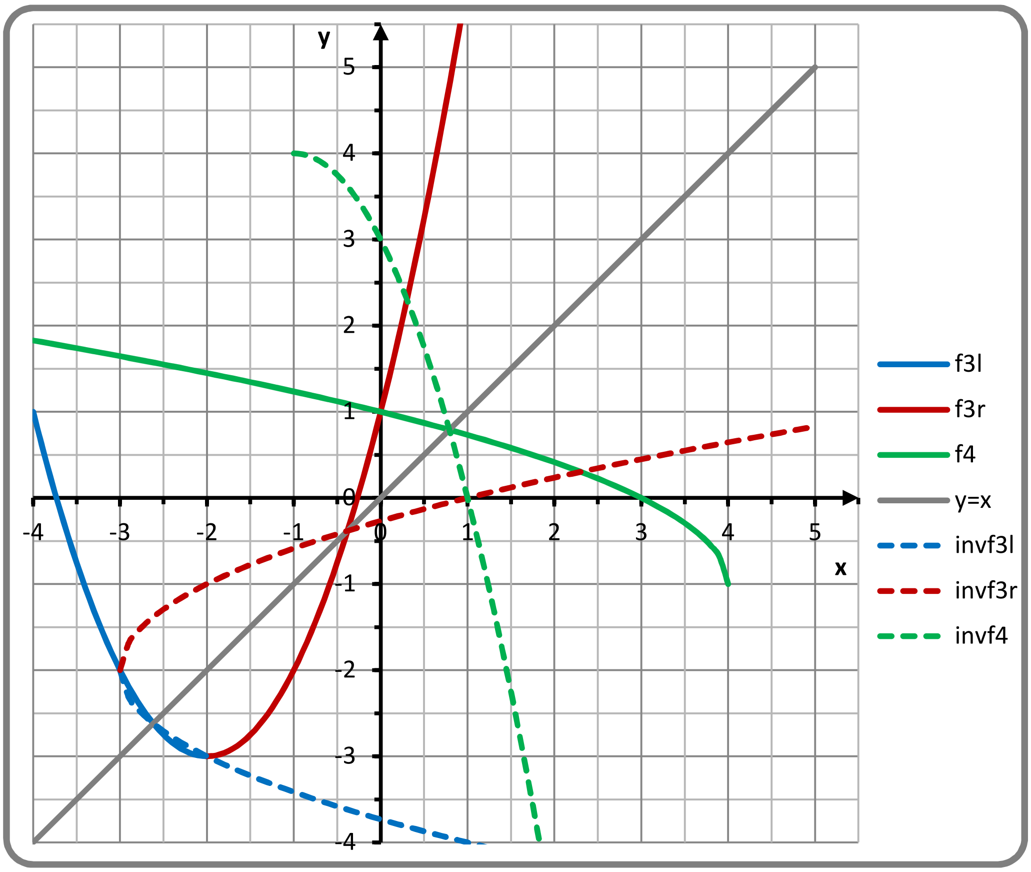
(a) Zeichnen Sie beide Funktionsbilder ein!

(b) Bestimmen Sie rechnerisch die beiden Umkehrfunktionen!

(c) Zeichnen Sie die Graphen der Umkehrfunktionen ein!

(d) Stellen Sie für die einander entsprechenden Funktionen und Umkehrfunktionen folgende Merkmale gegenüber: Definitions-, Wertebereich, Achsenschnittpunkte, Monotonie!

(a) + (c)



(b)

Funktion	$\boldsymbol{y = f_{3l/r}(x) = (x+2)^2 - 3}$	$\boldsymbol{y = f_4(x) = \sqrt{4-x} - 1}$
Austausch ($y \leftrightarrow x$)	$x = (y+2)^2 - 3$	$x = \sqrt{4-y} - 1$
Umstellen nach y	$x + 3 = (y+2)^2$ $\pm\sqrt{x+3} = y + 2$	$x + 1 = \sqrt{4-y}$ $(x+1)^2 = 4 - y$ $(x+1)^2 - 4 = -y$
Umkehr-funktion	$\boldsymbol{y = f_{3r}^{-1}(x) = \sqrt{x+3} - 2}$ $\boldsymbol{y = f_{3l}^{-1}(x) = -\sqrt{x+3} - 2}$	$\boldsymbol{y = f_4^{-1}(x) = -(x+1)^2 + 4}$

(d)

Funktion	$f_{3l}(x) = (x+2)^2 - 3$	$f_{3l}^{-1}(x) = -\sqrt{x+3} - 2$
Definitionsbereich	$D(f_{3l}) =]-\infty; -2[$	$D(f_{3l}^{-1}) = [-3; \infty[$
Wertebereich	$W(f_{3l}) = [-3; \infty[$	$W(f_{3l}^{-1}) =]-\infty; -2[$
Achsenschnittpunkte	$S_x(f_{3l}) = (-2-\sqrt{3}\mid 0)$ $S_y(f_{3l})$ entfällt	$S_x(f_{3l}^{-1})$ entfällt $S_y(f_{3l}^{-1}) = (0\mid -2-\sqrt{3})$
Monotonie	streng monoton fallend	

Funktion	$f_{3r}(x) = (x+2)^2 - 3$	$f_{3r}^{-1}(x) = \sqrt{x+3} - 2$
Definitionsbereich	$D(f_{3r}) = [-2; \infty[$	$D(f_{3r}^{-1}) = [-3; \infty[$
Wertebereich	$W(f_{3r}) = [-3; \infty[$	$W(f_{3r}^{-1}) = [-2; \infty[$
Achsenschnittpunkte	$S_x(f_{3r}) = (-2+\sqrt{3}\mid 0)$ $S_y(f_{3r}) = (0\mid 1)$	$S_x(f_{3r}^{-1}) = (1\mid 0)$ $S_y(f_{3r}^{-1}) = (0\mid -2+\sqrt{3})$
Monotonie	streng monoton wachsend	

Funktion	$f_4(x) = \sqrt{4-x} - 1$	$f_4^{-1}(x) = -(x+1)^2 + 4$
Definitionsbereich	$D(f_4) =]-\infty; 4]$	$D(f_4^{-1}) = [-1; \infty[$
Wertebereich	$W(f_4) = [-1; \infty[$	$W(f_4^{-1}) =]-\infty; 4]$
Achsenschnittpunkte	$S_x(f_4) = (3\mid 0)$ $S_y(f_4) = (0\mid 1)$	$S_x(f_4^{-1}) = (1\mid 0)$ $S_y(f_4^{-1}) = (0\mid 3)$
Monotonie	streng monoton wachsend	

3. Gegeben sind die kubische Funktion $f_5(x) = (x-2)^3 - 1$ und die Wurzelfunktion $f_6(x) = \sqrt[3]{2-x} - 1$.

(a) Zeichnen Sie beide Funktionsbilder ein!

(b) Bestimmen Sie rechnerisch die beiden Umkehrfunktionen!

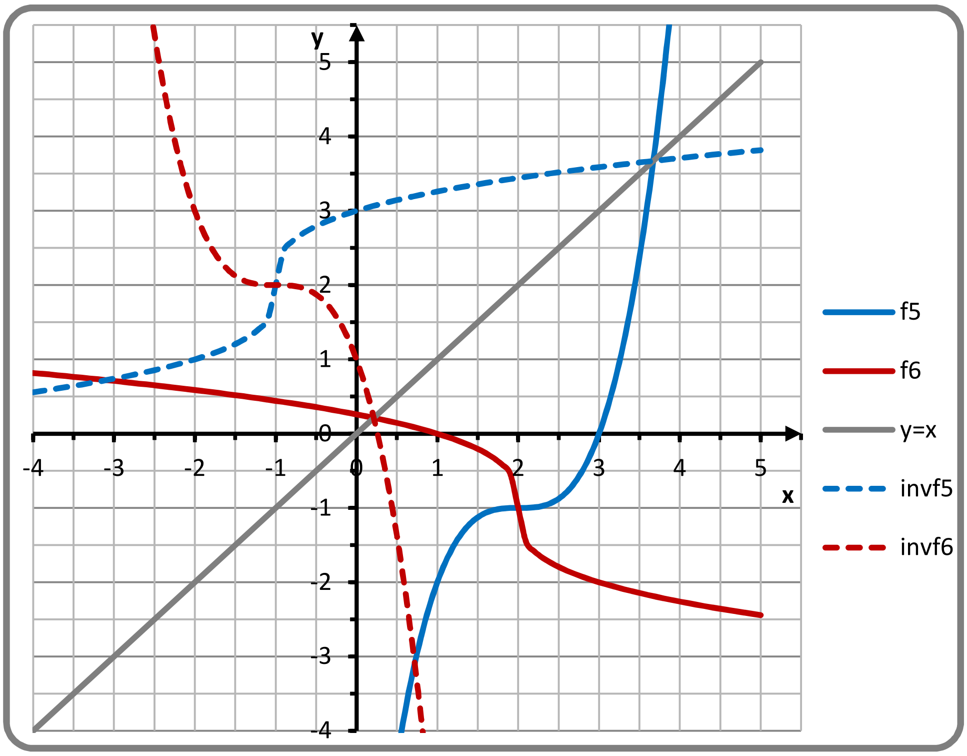
(c) Zeichnen Sie die Graphen der Umkehrfunktionen ein!

(d) Stellen Sie für die einander entsprechenden Funktionen und Umkehrfunktionen folgende Merkmale gegenüber: Definitions-, Wertebereich, Achsenschnittpunkte, Monotonie!

(b)

Funktion	$y = f_5(x) = (x-2)^3 - 1$	$y = f_6(x) = \sqrt[3]{2-x} - 1$
Austausch ($y \leftrightarrow x$)	$x = (y-2)^3 - 1$	$x = \sqrt[3]{2-y} - 1$
Umstellen nach y	$x + 1 = (y-2)^3$ $\sqrt[3]{x+1} = y - 2$	$x + 1 = \sqrt[3]{2-y}$ $(x+1)^3 = 2 - y$ $(x+1)^3 - 2 = -y$
Umkehrfunktion	$y = f_5^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1} + 2$	$y = f_6^{-1}(x) = -(x+1)^3 + 2$

(a) + (c)



(d)

Funktion	$\boldsymbol{f_5(x) = (x-2)^3 - 1}$	$\boldsymbol{f_5^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1} + 2}$
Definitionsbereich	$D(f_5) = \mathrm{R}$	$D(f_5^{-1}) = \mathrm{R}$
Wertebereich	$W(f_5) = \mathrm{R}$	$W(f_5^{-1}) = \mathrm{R}$
Achsenschnittpunkte	$S_x(f_5) = (3\|0)$ $S_y(f_5) = (0\|-9)$	$S_x(f_5^{-1}) = (-9\|0)$ $S_y(f_5^{-1}) = (0\|3)$
Monotonie	streng monoton wachsend	

Funktion	$\boldsymbol{f_6(x) = \sqrt[3]{2-x} - 1}$	$\boldsymbol{f_6^{-1}(x) = -(x+1)^3 + 2}$
Definitionsbereich	$D(f_6) = \mathrm{R}$	$D(f_6^{-1}) = \mathrm{R}$
Wertebereich	$W(f_6) = \mathrm{R}$	$W(f_6^{-1}) = \mathrm{R}$
Achsenschnittpunkte	$S_x(f_6) = (1\|0)$ $S_y(f_6) = (0\|\sqrt[3]{2} - 1)$	$S_x(f_6^{-1}) = (\sqrt[3]{2} - 1\|0$ $S_y(f_6^{-1}) = (0\|1)$
Monotonie	streng monoton fallend	

4. Gegeben sind die beiden Hyperbelfunktionen $f_7(x) = (x+1)^{-2} - 1$ und $f_8(x) = (x-1)^{-1} + 1$.

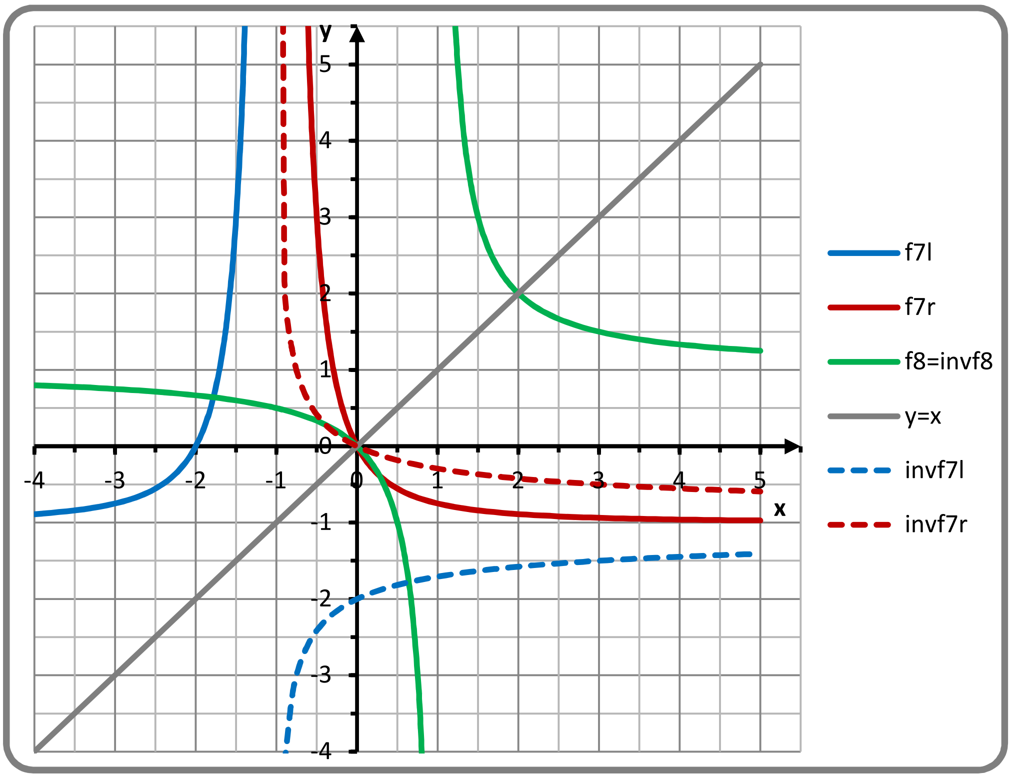
(a) Zeichnen Sie beide Funktionsbilder ein!

(b) Bestimmen Sie rechnerisch die beiden Umkehrfunktionen!

(c) Zeichnen Sie die Graphen der Umkehrfunktionen ein!

(d) Stellen Sie für die einander entsprechenden Funktionen und Umkehrfunktionen folgende Merkmale gegenüber: Definitions-, Wertebereich, Achsenschnittpunkte, Monotonie!

(a) + (c)



(b)

Funktion	$\boldsymbol{y = f_{7lr}(x) = (x+1)^{-2} - 1}$	$\boldsymbol{y = f_8(x) = (x-1)^{-1} + 1}$
Austausch ($y \leftrightarrow x$)	$x = (y+1)^{-2} - 1$	$x = (y-1)^{-1} + 1$
Umstellen nach y	$x + 1 = (y+1)^{-2}$ $\pm\sqrt{\frac{1}{x+1}} = y + 1$	$x - 1 = (y-1)^{-1}$ $\frac{1}{x-1} = y - 1$
Umkehr-funktion	$\boldsymbol{y = f_{7l}^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{1}{x+1}} - 1}$ $\boldsymbol{y = f_{7r}^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{x+1}} - 1}$	$\boldsymbol{y = f_8^{-1}(x) = (x-1)^{-1} + 1}$

(d)

Funktion	$\boldsymbol{f_{7l}(x) = (x+1)^{-2} - 1}$	$\boldsymbol{f_{7l}^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{1}{x+1}} - 1}$
Definitionsbereich	$D(f_{7l}) =]-\infty; -1[$	$D(f_{7l}^{-1}) =]-1; \infty[$
Wertebereich	$W(f_{7l}) =]-1; \infty[$	$W(f_{7l}^{-1}) =]-\infty; -1[$
Achsenschnittpunkte	$S_x(f_{7r}) = (-2\|0)$ $S_y(f_{7r})$ entfällt	$S_x(f_{7r}^{-1})$ entfällt $S_y(f_{7r}^{-1}) = (0\| -2)$
Monotonie	streng monoton wachsend	

Funktion	$\boldsymbol{f_{7r}(x) = (x+1)^{-2} - 1}$	$\boldsymbol{f_{7r}^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{x+1}} - 1}$
Definitionsbereich	$D(f_{7r}) =]-1;\infty[$	$D(f_{7r}^{-1}) =]-1;\infty[$
Wertebereich	$W(f_{7r}) =]-1;\infty[$	$W(f_{7r}^{-1}) =]-1;\infty[$
Achsenschnittpunkte	$S_x(f_{7r}) = (0\|0) = S_y(f_{7r})$	$S_x(f_{7r}^{-1}) = (0\|0) = S_y(f_{7r}^{-1})$
Monotonie	streng monoton fallend	

Funktion	$\boldsymbol{f_8(x) = (x-1)^{-1} + 1}$	$\boldsymbol{y = f_8^{-1}(x) = \frac{1}{x-1} + 1}$
Definitionsbereich	$D(f_8) = \mathrm{R}\backslash\{1\}$	$D(f_8^{-1}) = \mathrm{R}\backslash\{1\}$
Wertebereich	$W(f_8) = \mathrm{R}\backslash\{1\}$	$W(f_8^{-1}) = \mathrm{R}\backslash\{1\}$
Achsenschnittpunkte	$S_x(f_8) = (0\|0) = S_y(f_8)$	$S_x(f_8^{-1}) = (0\|0)=S_y(f_8^{-1})$
Monotonie	streng monoton fallend	

5. Gegeben sind die Exponentialfunktion $f_9(x) = e^{x-2} - 3$ und die Logarithmusfunktion $f_{10}(x) = \log_2(x+2) + 1$.

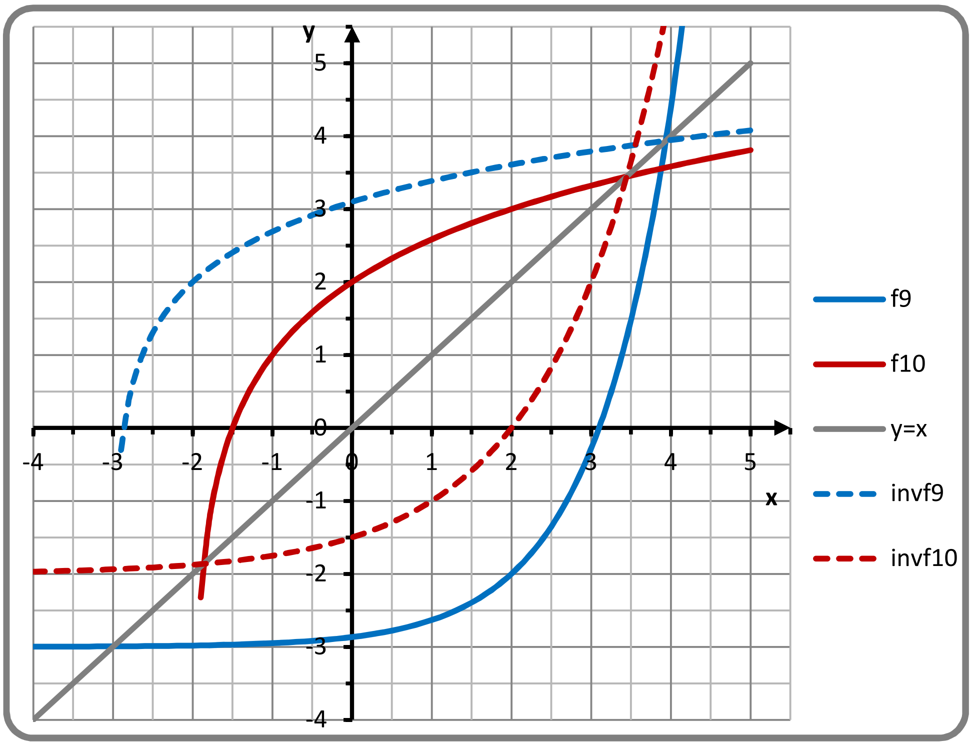
(a) Zeichnen Sie beide Funktionsbilder ein!

(b) Bestimmen Sie rechnerisch die beiden Umkehrfunktionen!

(c) Zeichnen Sie die Graphen der Umkehrfunktionen ein!

(d) Stellen Sie für die einander entsprechenden Funktionen und Umkehrfunktionen folgende Merkmale gegenüber: Definitions-, Wertebereich, Achsenschnittpunkte, Monotonie!

(a) + (c)



(b)

Funktion	$\boldsymbol{y = f_9(x) = e^{x-2} - 3}$	$\boldsymbol{y = f_{10}(x) = \log_2(x+2) + 1}$
Austausch ($y \leftrightarrow x$)	$x = e^{y-2} - 3$	$x = \log_2(y+2) + 1$
Umstellen nach y	$x + 3 = e^{y-2}$ $\ln(x+3) = y - 2$	$x - 1 = \log_2(y+2)$ $2^{x-1} = y + 2$
Umkehr-funktion	$\boldsymbol{y = f_9^{-1}(x) = ln(x+3) + 2}$	$\boldsymbol{y = f_{10}^{-1}(x)} = 2^{x-1} - 2$

(d)

Funktion	$\boldsymbol{f_9(x) = e^{x-2} - 3}$	$\boldsymbol{f_9^{-1}(x) = ln(x+3) + 2}$
Definitionsbereich	$D(f_9) = R$	$D(f_9^{-1}) =]-3; \infty[$
Wertebereich	$W(f_9) =]-3; \infty[$	$W(f_9^{-1}) = \mathrm{R}$
Achsenschnittpunkte	$S_x(f_9) = (2 + ln3 \vert 0)$ $S_y(f_9) = (0 \vert e^{-2} - 3)$	$S_x(f_9^{-1}) = (e^{-2} - 3 \vert 0)$ $S_y(f_9^{-1}) = (0 \vert 2 + ln3)$
Monotonie	streng monoton wachsend	

Funktion	$\boldsymbol{f_{10}(x) = \log_2(x+2) + 1}$	$\boldsymbol{f_{10}^{-1}(x) = 2^{x-1} - 2}$
Definitionsbereich	$D(f_{10}) =]-2; \infty[$	$D(f_{10}^{-1}) = \mathrm{R}$
Wertebereich	$W(f_{10}) = \mathrm{R}$	$W(f_{10}^{-1}) =]-2; \infty[$
Achsenschnittpunkte	$S_x(f_{10}) = (-1{,}5 \vert 0)$ $S_y(f_{10}) = (0 \vert 2)$	$S_x(f_{10}^{-1}) = (2 \vert 0)$ $S_y(f_{10}^{-1}) = (0 \vert -1{,}5)$
Monotonie	streng monoton wachsend	