

Exponentialfunktionen Aufgaben

1. In welcher Zeit verdoppelt sich ein Guthaben von 4000 € bei einer Verzinsung von 5 %?
2. Bei welchem Zinssatz wächst ein Kapital von 800 € auf 1000 € in 4 Jahren an?
3. Welcher Prozentsatz müsste vorliegen, damit sich ein Kapital von 1000 € in 10 Jahren verdreifacht?
Hängt die Zeit von der Größe des Anfangskapitals ab? (*Begründung*)
4. Erna erhält von ihrem Onkel jeweils 150 € zum 10., 11., 12. Geburtstag. Das Geld wird (sofort nach Erhalt) mit 4 % auf der Sparkasse verzinst. Über welchen Betrag kann Erna zu ihrem 18. Geburtstag verfügen?
5. Eine Lotosblume bedeckt zum jetzigen Zeitpunkt eine Teichfläche von $0,01 \text{ m}^2$. Die bedeckte Teichfläche verdreifacht sich alle zwei Monate. Nach welcher Zeit (nach Beginn der Beobachtung) beträgt die bedeckte Teichfläche 10 m^2 ?
6. Die Temperatur eines 50°C heißen Körpers sinkt jeweils innerhalb einer Stunde auf die Hälfte ihres Wertes zu Beginn der Stunde. Der Abkühlungsprozeß wird durch $y = 50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ beschrieben.
 - a) Welche Temperatur hat der Körper 8 Stunden nach Beginn des Abkühlungsvorganges?
 - b) Nach welcher Zeit beträgt die Temperatur des Körpers 1°C ?
7. Auf dem Graphen der Funktion $y = k \cdot a^x$ liegen die Punkte $A(-1 \mid 1,39)$ und $B(3 \mid 14,58)$. Bestimme die Konstanten a und k .
8. Wie lautet die Funktionsgleichung (x Zeit in Stunden, die anfängliche Masse sei N_0), die den radioaktiven Zerfall beschreibt, falls die Halbwertszeit
 - a) 2 Tage,
 - b) 10 Minuten beträgt?
9. Ein radioaktives Isotop zerfällt gemäß $y = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{0,25x}$. Bringe die Funktionsgleichung auf die Form: $y = N_0 \cdot 3^{ax}$. N_0 ist die anfängliche Masse. Bestimme also a .
10. In einem See verringert sich die Intensität des Lichts mit jedem Meter Wassertiefe um 40 % . Wie lautet die Funktionsgleichung, die diese Abnahme beschreibt? (x sei die Tiefe in m, an der Wasseroberfläche sei die Lichtintensität 1. Erläutere deine Lösung.)

Lösungen:

- | | | | |
|------------------|---|---|---|
| 1. $n = 14,2$ | 4. $150 \cdot (q^6 + q^7 + q^8) = 592,47$ | 6. b) 5,6 | 8. b) $y = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6x}$ |
| 2. $p = 5,7 \%$ | 5. 12,6 | 7. $a = 1,7996$; $k = 2,5$ | 9. $a = -0,1577$ |
| 3. $p = 11,6 \%$ | 6. a) 0,20 | 8. a) $y = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{48}}$ | 10. $y = 1 \cdot \left(1 - \frac{40}{100}\right)^x$ |

Aufgaben Exponentialfunktion

Wir gehen hier von der Form $f(x)=b \cdot a^x$ für die Exponentialfunktion aus. In der Oberstufe wird hierfür oft $f(x) = b \cdot e^{kx}$ geschrieben mit der Euler'schen Zahl e . Dann wäre hier $k = \ln(a)$ oder $a = e^k$.

Aufgaben:

- 1) Am Anfang gab es 1000 Bakterien in einer Probe. Nach 3 Minuten waren es 3375 Bakterien.
 - a) Wie lautet die Gleichung der Exponentialfunktion für die Zuordnung: Zeit in Minuten $\rightarrow$ Anzahl Bakterien?
 - b) Wie viele Bakterien sind es nach diesem Modell in 10 Minuten?
- 2) Luna hat 2000€ auf einem Konto angelegt. Die Bank zahlt 1,5% Zinsen.
 - a) Wie lautet die Gleichung der Exponentialfunktion (Zeit in Jahren $\rightarrow$ Kontostand), wenn auch für die Zinsen in den folgenden Jahren Zinsen gezahlt werden (Zinseszins)?
 - b) Wie viel Geld hat Sie in 4 Jahren auf dem Konto?
 - c) Wann sind es 2252,99€?
- 3) Der Akku eines Smartphones verliert im Betrieb pro Tag 20% an Leistung.
Wie viel Leistung hat er nach 10 Tagen verloren?
- 4) 10 Schüler kennen ein Gerücht. Jede Person erzählt es pro Tag 3 Personen weiter. Wann kennt es die ganze Schule mit 810 Schülern?
- 5) 2010 hatten 1 Millionen Personen das Smartphone X. Im Jahr 2014 waren es 2,0736 Millionen. Wie viele werden es im Jahr 2020 sein?
- 6) Tamara hat ein neues Auto gekauft. Nach 2 Jahren ist dieses noch 28900€ wert und nach 5 Jahren noch 17748,21€.
 - a) Wie viel hat dieses beim Kauf gekostet?
 - b) Wie viel ist es noch in 10 Jahren wert?

Lösung

1) a)

$$f(x) = a \cdot b^x$$

$$f(0) = a \cdot b^0 = 1000$$

$$\Rightarrow a = 1000 \quad (\text{da } b^0 = 1)$$

$$f(3) = a \cdot b^3 = 3375 \quad (1)$$

$$\begin{array}{lll} \text{Wir setzen } a = 1000 \text{ in (1) ein:} & 1000 \cdot b^3 = 3375 & | : 1000 \\ & b^3 = 3,375 & | \sqrt[3]{} \\ & b = 1,5 & \end{array}$$

$$\text{Also: } f(x) = 1000 \cdot 1,5^x$$

$$\text{a) } f(10) = 1000 \cdot 1,5^{10} \approx 57665$$

Also sind es nach 10 Minuten ca. 57665 Bakterien.

2) a) Hier ist $a = 2000$ (Anfangswert) und $b = 1,015 = 1 + \text{Zinssatz}/100$, denn nach einem Jahr hätte sie

$$\begin{aligned} 2000 + 2000 \cdot \frac{1,5}{100} &= 2000 \cdot \left(1 + \frac{1,5}{100}\right) \\ &= 2000 \cdot 1,015 = 2030\text{€} . \end{aligned}$$

$$\text{Also: } f(x) = 2000 \cdot 1,015^x$$

$$\text{b) } f(4) = 2000 \cdot 1,015^4 \approx 2122,73\text{€}$$

$$\text{c) } x = ? \quad f(x) = 2252,99$$

$$2000 \cdot 1,015^x = 2252,99 \quad | : 2000$$

$$1,015^x = 1,126495 \dots \quad (\text{Ergebnis im Taschenrechner lassen})$$

$$1,015^x = 1,126495 \dots \quad | \log_{1,015}()$$

$$x = \log_{1,015}(1,126495 \dots) \approx 8, \text{ also ca. 8 Jahre.}$$

3) $a = 100$ (Wir setzen a auf 100%, man hätte auch $a = 1$ setzen können).

$$b = 1 - \frac{\text{prozentualer Verlust}}{100} = 1 - \frac{20}{100} = 0,8$$

$$f(x) = 100 \cdot 0,8^x$$

$$\text{Nach 10 Tagen: } f(10) \approx 10,74$$

Damit sind nach 10 Tagen noch ca. 10,74% Restleistung vorhanden:

$$\text{Verlust} \approx 100\% - 10,74\% = 82,26\%$$

$$4) a = 10$$

$$b = 3$$

$$f(x) = 100 \cdot 3^x$$

$$10 \cdot 3^x = 810 \quad | : 10$$

$$3^x = 81 \quad | \log_3 () \qquad x = \log_3 (81) = 4$$

5) Wir wählen 2010 als Jahr 0 ($x = 0$), damit ist 2014 das Jahr 4. $b = 1$ (Mio.)

$$f(x) = 1 \cdot a^x = a^x$$

$$f(4) = a^4 = 2,0736 \quad | \sqrt[4]{}$$

$a = 1,2$ (hier darf man nur die positive Lösung verwenden)

$$f(x) = 1,2^x$$

Das Jahr 2020 ist das Jahr 10.

$$f(10) = 1,2^{10} \approx 6,19 \text{ (Mio.)}$$

$$6) f(x) = b \cdot a^x$$

$$f(2) = b \cdot a^2 = 28900 \quad (1)$$

$$f(5) = b \cdot a^5 = 17748,21 \quad (2)$$

Wir lösen (1) nach b auf:

$$b \cdot a^2 = 28900 \quad | : a^2$$

$$b = 28900/a^2 \quad (3)$$

$$\text{Dies setzen wir in (2) ein: } \frac{28900}{a^2} \cdot a^5 = 17748,21$$

$$28900 \cdot a^3 = 17748,21 \quad (\text{da } a^n/a^m = a^{n-m} \text{ ist})$$

$$a^3 = 17748,21/28900 \quad | \sqrt[3]{}$$

$$a \approx 0,85 \quad \text{Setzt man dies in (3) ein, ergibt sich } b \approx 28900/0,85^2 = 40000$$

Damit ist $f(x) = 40000 \cdot 0,85^x$ und der Anfangspreis beträgt 40000€ (Antwort zu a)).

b) $f(10) = 40000 \cdot 0,85^{10} \approx 7874,98$, womit das Auto nach 10 Jahren noch ca. 7874,98€ wert ist.