STOCHASTIK

Binomialverteilung

Einführung:

Kaum Theorie, aber viel Training

Mehr Theorie in 34012
Zusätzliche Aufgabensammlung in 34121

Ausführliche Erklärung des Einsatzes dreier Rechner:

Grafikrechner:	CASIO fx 9860
CAS-Rechner:	CASIO ClassPad 330
	TI Nspire CAS

Datei Nr. 34 011

Stand: 16. Juli 2009

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

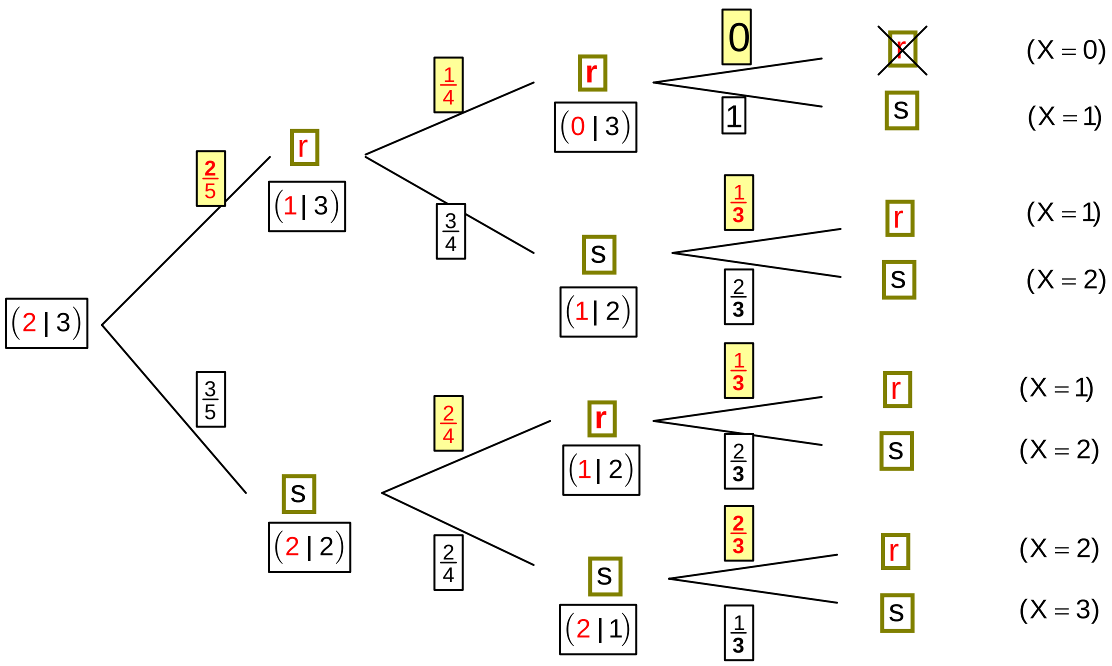
§ 1 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

1.1 Grundlagen, die man zum Verständnis wissen muss

Eine bestimmte Sorte von Experimenten besteht aus einer Kette aufeinanderfolgender Einzelexperimente. Bei deren Durchführung interessiert dann, wie oft ein bestimmtes Ergebnis eintritt. Diese zählt man und weist die Anzahl einer Variablen zu, die man **Zufallsvariable** (oder einfacher auch „Zählvariable") nennt.

Beispiel 1: **Rote und schwarze Karten ziehen (1. Art)**

In einem Kartenstapel befinden sich 2 rote und 3 schwarze Karten. Man entnimmt daraus 3 Karten der Reihe nach und legt sie in der Reihenfolge vor sich auf den Tisch, in der man sie zieht.
Beschreibe alle Möglichkeiten durch ein Baumdiagramm. Da sich durch das Entnehmen der Karten der Bestand laufend ändert, ist die zweite Ziehung einer Karte ein anderes Experiment als die erste Ziehung. Jetzt sind nur noch 4 Karten vorhanden. Im nachfolgenden Baumdiagramm habe ich vor jede Ziehung den Inhalt des Stapels als Zahlenpaar angeschrieben: $(r \mid s)$
Daraus berechnet man die Wahrscheinlichkeiten für die nächsten Ziehungsergebnisse. Im 1. Pfad kommt die Situation vor, dass nach dem 2. Zug bereits beide roten Karten gezogen sind, so dass man im 3. Zug keine rote Karte mehr ziehen kann.



Wir zählen jetzt, wie viele schwarze Karten dabei gezogen werden können. Dazu wird die **Zufallsvariable** X eingeführt: **X sei die Zahl der gezogenen schwarzen Karten.**

Zu einer Variablen gehört stets ein Definitionsbereich, der angibt, welche Zahlen die Variable X annehmen kann. Hier gilt: $\mathbf{D} = \{0,1,2,3\}$ **,** denn man kann 0 bis 3 schwarze Karten ziehen.
Hinter dem Baumdiagramm steht zu jedem Pfad der Wert von X.

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der vier Werte von X

Das Ereignis „X = 0“ (in Worten: Es wird keine schwarze Karte gezogen) wird im 1. Pfad dargestellt. Man erkennt, dass es die Wahrscheinlichkeit 0 hat, denn weil es nur 2 rote Karten im Topf gibt, muss eine der drei gezogenen Karten schwarz sein.

Notation: $P(X=0)=0$

Und man liest das so: „Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahl der gezogenen schwarzen Karten 0 ist, ist 0“.

Das Ereignis „X = 1“ (in Worten: Es wird genau eine schwarze Karte gezogen) wird im 2., 3. und 5. Pfad dargestellt. Gemäß den Pfadregeln berechnet man die Wahrscheinlichkeit für jeden Pfad und addiert:

$$P(X=1)=\underbrace{\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot 1}_{\text{Pfad 2}}+\underbrace{\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{3}}_{\text{Pfad 3}}+\underbrace{\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{2}{4}\cdot\tfrac{1}{3}}_{\text{Pfad 5}}$$

Man sollte nicht kürzen, um den gemeinsamen Nenner nicht zu zerstören:

$$P(X=1)=\underbrace{\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{3}}_{\text{Pfad 2}}+\underbrace{\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{3}}_{\text{Pfad 3}}+\underbrace{\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{2}{4}\cdot\tfrac{1}{3}}_{\text{Pfad 5}}=\boxed{3}\cdot\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{2}{4}\cdot\tfrac{1}{3}=3\cdot\tfrac{6}{60}=\tfrac{18}{60}=0{,}3$$

Das Ereignis „X = 2“ (Es werden genau zwei schwarze Karten gezogen) wird im 4., 6. und 7. Pfad dargestellt.

$$P(X=2)=\underbrace{\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{2}{3}}_{\text{Pfad 4}}+\underbrace{\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{2}{4}\cdot\tfrac{2}{3}}_{\text{Pfad 6}}+\underbrace{\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{2}{4}\cdot\tfrac{2}{3}}_{\text{Pfad 7}}=\boxed{3}\cdot\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{2}{4}\cdot\tfrac{2}{3}=3\cdot\tfrac{12}{60}=\tfrac{36}{60}=0{,}6$$

Das Ereignis „X = 3“ (Es werden drei schwarze Karten gezogen) wird im 8. Pfad dargestellt:

$$P(X=3)=\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{2}{4}\cdot\tfrac{1}{3}=\tfrac{6}{60}=0{,}1$$

WISSEN:

Die Gesamtheit der zu einer Zufallsvariablen gehörenden Wahrscheinlichkeitswerte nennt man die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsvariablen.

Es handelt sich dabei um eine *Funktion*, die jedem der Ereignisse „X = k“ eine Wahrscheinlichkeit zuordnet. Ihr Definitionsbereich sind die (hier 4) möglichen Ergebnisse, die zu den Werten der Zufallsvariablen gehören: $D=\{0;1;2;3\}$ **.**

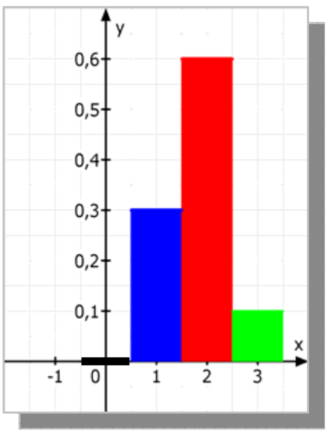
Hier die Wertetafel der Wahrscheinlichkeitsverteilung und ihr Schaubild in Form eines Histogramms:

$$P(X=0)=0$$

$$P(X=1)=\tfrac{18}{60}=0{,}3$$

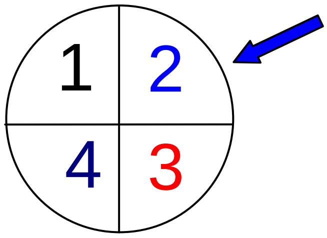
$$P(X=2)=\tfrac{36}{60}=0{,}6$$

$$P(X=3)=\tfrac{6}{60}=0{,}1$$



BEISPIEL 3 - DAS GLÜCKSRAD - KURZLÖSUNG

Das gezeigte Glücksrad wird für ein Spiel 5-mal gedreht. Die Gewinnzahl ist die 1. Der Einsatz beträgt 1 €, bei folgenden Gewinnen: Bei 5 Einsen gibt es 100 €, bei 4 Einsen 20 €, bei 3 Einsen 1 €, in allen anderen Fällen gibt es nichts. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten für diese Gewinne?



Unbedingt notwendige Vorbereitungen der Berechnung:

(1) Es sei X die Zufallsvariable „Anzahl der erzielten Einsen“.

(2) Bei n = 5 Drehungen ist $D = \{0,1,2,3,4,5\}$.

(3) Grund-Wahrscheinlichkeit: Für die 1: $p = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Für Nicht-1: $q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

$P(X=0) = 0{,}75^5 \approx 0{,}237$ denn es gibt nur 1 Pfad mit 5-mal $\overline{1}$.

$P(X=1) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75^4 \approx 0{,}400$ denn man kann auf $\binom{5}{1} = 5$ Arten <u>einen</u> Platz aus 5 Plätzen auswählen.

$P(X=2) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^3 \approx 0{,}264$ Denn man kann auf $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$ Arten 2 Plätze aus 5 auswählen.

$P(X=3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^2 \approx 0{,}088$ Denn man kann auf $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 2 \cdot 1} = 10$ Arten 3 Plätze aus 5 auswählen.

$P(X=4) = \binom{5}{4} \cdot 0{,}25^4 \cdot 0{,}75 \approx 0{,}0146$ Denn man kann auf $\binom{5}{4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4!} = \frac{5 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2}}{\cancel{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 1} = 5$ Arten 4 Plätze aus 5 auswählen.

Hinweis: Man sollte wissen, dass $\binom{5}{3} = \binom{5}{2}$ und $\binom{5}{4} = \binom{5}{1}$ ist, was man auch gleich anwenden kann. Siehe dazu den Text 33011.

$P(X=5) = \underbrace{\binom{5}{5}}_{\text{unnötig}} \cdot 0{,}25^5 = 0{,}25^5 \approx 0{,}001$ $\binom{5}{5} = 1$. Es gibt nur einen Pfad hierfür!

Ich habe jetzt gleich die Anzahl der Pfade durch die Binomialkoeffizienten $\binom{5}{k}$ eingesetzt.

Denn bei jedem solchen Ereignis liegt eine Platzauswahl vor, deren Ergebnis man eben so berechnet, wie in der ausführlichen Lösung zuvor gezeigt worden ist.

Ausführliches dazu findet man im Heft 33011 Kombinatorik ab Seite 20.

Die Berechnung von Binomialverteilungswerten mit Rechnern folgt in 1.4