

4.2. Aufgaben zu quadratischen Funktionen

Aufgabe 1: Streckung und Stauchung

a) Bestimme die Gleichungen der rechts abgebildeten Parabeln:

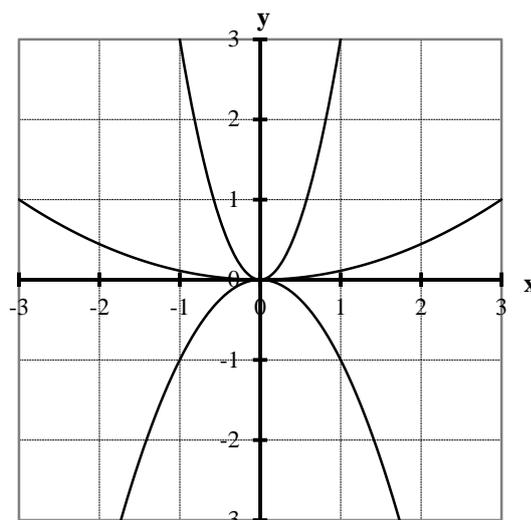
$$f_1(x) =$$

$$f_2(x) =$$

$$f_3(x) =$$

b) Zeichne die folgenden Parabeln ebenfalls in das Koordinatensystem:

$$f_4(x) = \frac{1}{3}x^2, \quad f_5(x) = -\frac{1}{4}x^2 \quad \text{und} \quad f_6(x) = -2x^2.$$



Aufgabe 2: Verschiebung in y-Richtung

a) Bestimme die Gleichungen der rechts abgebildeten Parabeln:

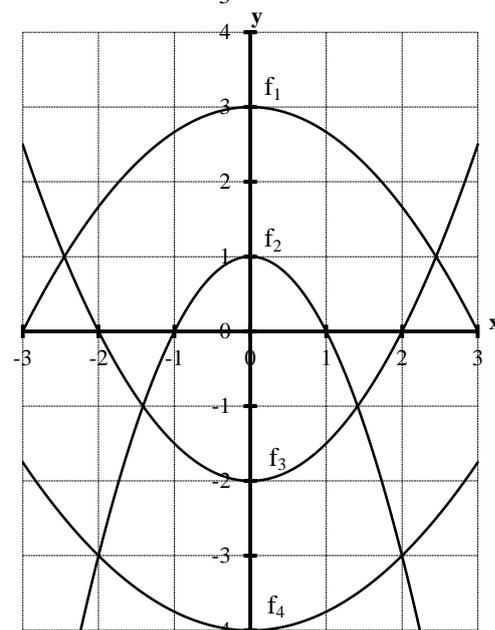
$$f_1(x) = \underline{\hspace{2cm}} \quad f_2(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f_3(x) = \underline{\hspace{2cm}} \quad f_4(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

b) Zeichne die folgenden Parabeln ebenfalls in das Koordinatensystem:

$$f_5(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4, \quad f_6(x) = x^2 - 1$$

$$f_7(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2 \quad f_8(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3$$



Aufgabe 3: Verschiebung in x-Richtung

a) Bestimme die Gleichungen der rechts abgebildeten Parabeln:

$$f_1(x) = \underline{\hspace{2cm}} \quad f_4(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

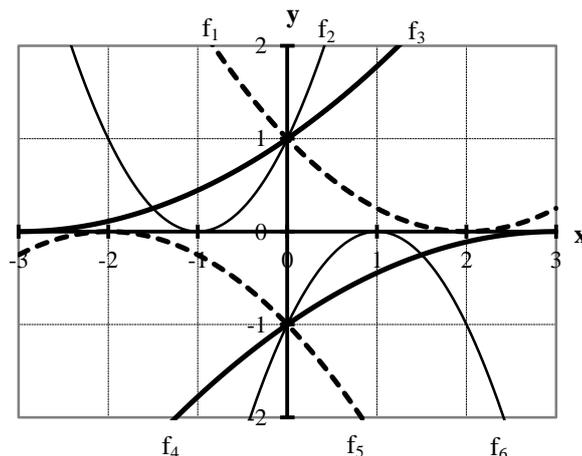
$$f_2(x) = \underline{\hspace{2cm}} \quad f_5(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f_3(x) = \underline{\hspace{2cm}} \quad f_6(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

b) Zeichne ebenfalls in das Koordinatensystem:

$$f_7(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2 \quad f_8(x) = (x-1)^2 \quad f_9(x) = \frac{1}{9}(x-3)^2$$

$$f_{10}(x) = -\frac{1}{9}(x+3)^2 \quad f_{11}(x) = -(x+1)^2 \quad f_{12}(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2.$$



Aufgabe 4: Scheitelpunktform

Bestimme die Gleichung der verschobenen Normalparabeln mit den folgenden Scheitelpunkten:

a) S(3|0)

c) S(0|2)

e) S(4|2)

g) S(-5|-1)

b) S(-1|0)

d) S(0|-7)

f) S(-3|2)

h) S(3|-2)

Aufgabe 5: Scheitelpunktform

Gib den Scheitelpunkt, die Streckung bzw. Stauchung in y-Richtung und die Öffnung der Parabel an.

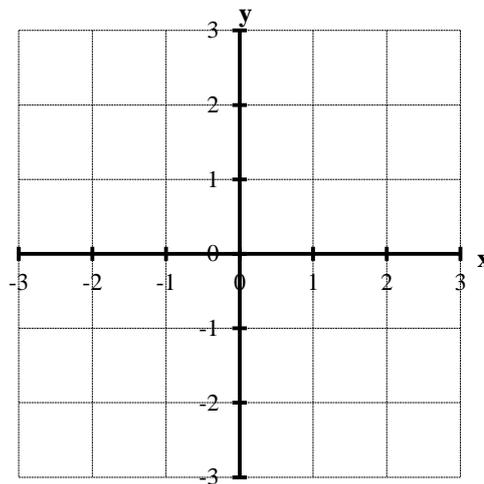
Skizziere dann mit Hilfe dieser Angaben das Schaubild der Parabel ausgehend vom Scheitelpunkt.

$$f_1(x) = -(x+2)^2 + 2 \quad f_2(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2$$

$$f_3(x) = (x+2)^2 - 2 \quad f_4(x) = 2(x+2)^2 - 2$$

$$f_5(x) = (x-2)^2 - 2 \quad f_6(x) = 2(x-2)^2 - 2$$

$$f_7(x) = -(x-2)^2 + 2 \quad f_8(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$$



Aufgabe 6: Scheitelpunktform

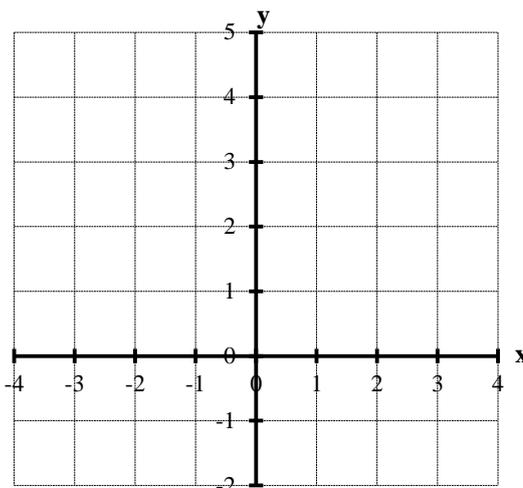
Bestimme die Scheitelpunkte und zeichne die Parabeln in das Koordinatensystem rechts ein. Welche Parabel fehlt?

$$f_1(x) = -2(x+3)^2 + 5 \quad f_2(x) = -(x+2)^2 + 1$$

$$f_3(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 1$$

$$f_5(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad f_6(x) = -(x-2)^2 + 1$$

$$f_7(x) = -2(x-3)^2 + 5 \quad f_8(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$



Aufgabe 7: Scheitelpunktform

Bestimme die Scheitelpunktform und den Scheitelpunkt der folgenden Parabeln.

a) $f(x) = x^2 + 4x + 4$

g) $f(x) = x^2 + 8x + 17$

m) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - x - \frac{4}{3}$

b) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

h) $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$

n) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{7}{2}$

c) $f(x) = x^2 + 4x - 2$

i) $f(x) = -2x^2 - 4x + 2$

o) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}$

d) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

j) $f(x) = -x^2 - 5x - 4$

p) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 5$

e) $f(x) = x^2 - 2x$

k) $f(x) = -x^2 - 4x - 4$

q) $f(x) = \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$

f) $f(x) = x^2 + 6x + 8$

l) $f(x) = -x^2 - x - \frac{5}{4}$

r) $f(x) = x^2 + px$

Aufgabe 8: Achsenschnittpunkte

Untersuche die Parabeln aus Aufgabe 6 auf Achsenschnittpunkte.

Aufgabe 9: Achsenschnittpunkte

Untersuche die Parabeln aus Aufgabe 7 auf Achsenschnittpunkte.

Aufgabe 10: Satz von Vieta

Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen durch Probieren. Berechne die Normalform $f(x) = x^2 + px + q$ durch Ausmultiplizieren. Wie lassen sich die Koeffizienten p und q aus den Nullstellen x_1 und x_2 berechnen?

a) $f(x) = (x+1) \cdot (x+2)$

c) $f(x) = (x+2) \cdot (x+4)$

e) $f(x) = (x+u) \cdot (x+4)$ mit $u \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = (x+2) \cdot (x+3)$

d) $f(x) = (x+3) \cdot (x+4)$

f) $f(x) = (x+u) \cdot (x+v)$ mit $u, v \in \mathbb{R}$

Aufgabe 11: Satz von Vieta

Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen durch Probieren mit dem Satz von Vieta:

- a) $f(x) = x^2 + 5x + 6$ e) $f(x) = x^2 - 7x + 12$ i) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + \frac{7}{2}$
 b) $f(x) = x^2 + 6x + 5$ f) $f(x) = x^2 + x - 12$ j) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{7}{3}$
 c) $f(x) = x^2 + 7x + 12$ g) $f(x) = x^2 - x - 30$ k) $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$
 d) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ h) $f(x) = x^2 + 4x - 5$ l) $f(x) = -3x^2 + 6x + 9$

Aufgabe 12: Intervallschreibweise

Gib die folgenden Mengen in Intervallschreibweise an.

- a) $A = \{x \in \mathbb{R}: 4 < x < 8\}$ f) $F = \{x \in \mathbb{R}: 4 < x\}$
 b) $B = \{x \in \mathbb{R}: -2 \leq x < 5\}$ g) $G = \{x \in \mathbb{R}: x \leq -2 \text{ oder } x \geq 3\}$
 c) $C = \{x \in \mathbb{R}: -100 < x \leq 30\}$ h) $H = \{x \in \mathbb{R}: x < -3 \text{ oder } x > 2\}$
 d) $D = \{x \in \mathbb{R}: 2 \leq x \leq 45\}$ i) $I = \{x \in \mathbb{R}: x \leq -5 \text{ oder } x > 5\}$
 e) $E = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 2\}$ j) $J = \{x \in \mathbb{R}: x < -6 \text{ oder } x \geq 6\}$

Aufgabe 13: Quadratische Ungleichungen

Vervollständige die Tabelle. Trage dazu jeweils die Bereiche ein, in denen die Funktion größer, echt größer, kleiner bzw. echt kleiner als Null ist:

$f(x) =$	$f(x) \geq 0$ für $x \in$	$f(x) > 0$ für $x \in$	$f(x) < 0$ für $x \in$	$f(x) \leq 0$ für $x \in$
$x^2 + x - 2$	$\mathbb{R} \setminus]-2; 1[$	$\mathbb{R} \setminus [-2; 1]$	$] -2; 1[$	$[-2; 1]$
$x^2 - x - 12$				
$-x^2 - x + 6$				
$-x^2 + 5x - 6$				
$x^2 + 3x + 4$				
$-x^2 + 2x - 1$				
$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 3$				
$\frac{1}{2}x^2 - 5x - 12$				
$x^2 + 4x + 4$				

Aufgabe 14: Gemeinsame Punkte

Bestimme die Koordinaten aller gemeinsamen Punkte von f und g:

- a) $f(x) = x^2 + 2x$ und $g(x) = x + 6$ d) $f(x) = x^2 + 3x + 5$ und $g(x) = -x + 1$
 b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ und $g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ e) $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = x^2 - 1$
 c) $f(x) = x^2 - 4x - 2$ und $g(x) = -x^2 + 2x + 6$ f) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ und $g(x) = -x^2 - 2x + 2$

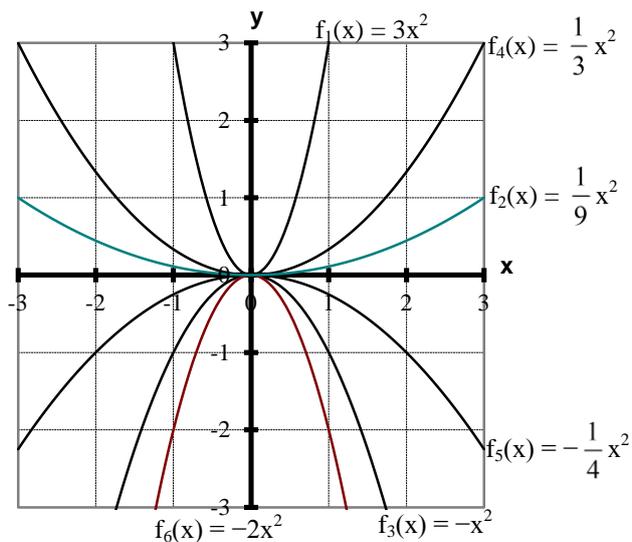
Aufgabe 15: Bestimmung von Funktionsgleichungen aus drei gegebenen Punkten

Bestimme die Gleichung der Parabel, die durch die Punkte P_1 , P_2 und P_3 verläuft.

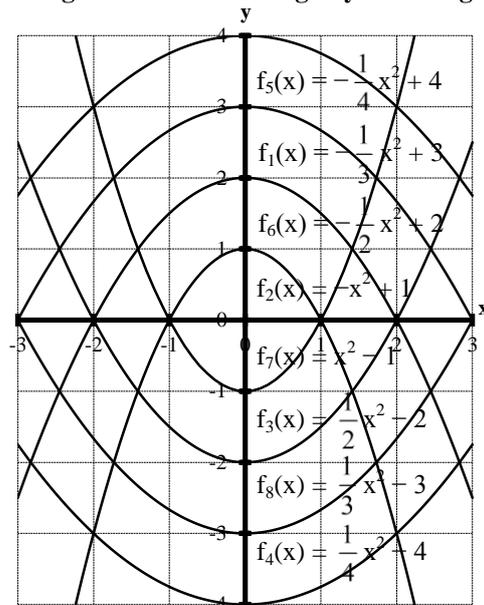
- a) $P_1(0|0)$, $P_2(1|2)$ und $P_3(3|-6)$ d) $P_1(1|3)$, $P_2(-1|1)$ und $P_3(2|7)$
 b) $P_1(0|-2)$, $P_2(2|1)$ und $P_3(-1|-\frac{11}{4})$ e) $P_1(1|1)$, $P_2(-1|3)$ und $P_3(2|3)$
 c) $P_1(-2|2)$, $P_2(-1|0)$ und $P_3(3|-28)$ f) $P_1(2|7)$, $P_2(1|3)$ und $P_3(0|1)$.

4.2. Lösungen zu den Aufgaben zu quadratischen Funktionen

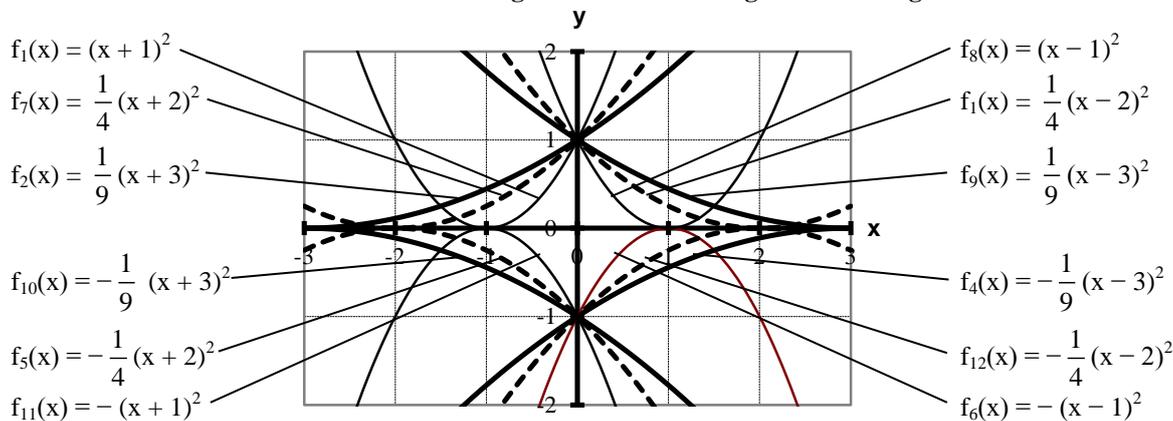
Aufgabe 1: Stauchung und Streckung



Aufgabe 2: Verschiebung in y-Richtung



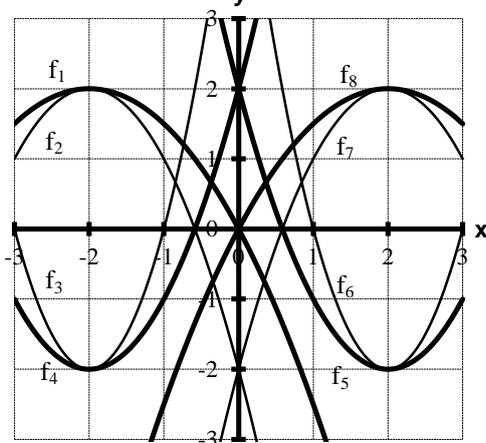
Aufgabe 3: Verschiebung in x-Richtung



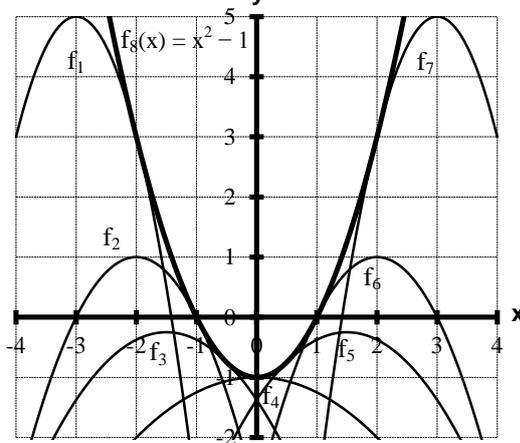
Aufgabe 4: Scheitelpunktform

- a) $f(x) = (x-3)^2$ c) $f(x) = x^2 + 2$ e) $f(x) = (x-4)^2 + 2$ g) $f(x) = (x+5)^2 - 1$
 b) $f(x) = (x+1)^2$ d) $f(x) = x^2 - 7$ f) $f(x) = (x+3)^2 + 2$ h) $f(x) = (x-3)^2 - 2$

Aufgabe 5: Scheitelpunktform



Aufgabe 6: Scheitelpunktform



Aufgabe 14: Gemeinsame Punkte

- a) $S_1(-3|3)$ und $S_2(2|8)$ c) $S_1(-1|3)$ und $S_2(4|-2)$ e) keine gemeinsamen Punkte
 b) $S_1(-1|1)$ und $S_2(-2|\frac{5}{2})$ d) $S_{1/2}(-2|3)$ (Berührungspunkt) f) keine gemeinsamen Punkte

Aufgabe 15: Bestimmung von Funktionsgleichungen aus drei gegebenen Punkten

- a) $f(x) = -2x^2 + 4x$ c) $f(x) = -x^2 - 5x - 4$ e) $f(x) = x^2 - x + 1$
 b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$ d) $f(x) = x^2 + x + 1$ f) $f(x) = x^2 + x + 1$

Aufgabe 16: Bestimmung von Funktionsgleichungen aus Scheitelpunkt und einem weiteren Punkt

- a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ c) $f(x) = -2x^2 + 4x$ e) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x - 1$
 b) $f(x) = -x^2 - 5x - 4$ d) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}$ f) $f(x) = x^2 - 6x + 7$

Aufgabe 17: Anwendungsaufgaben

- a) Die Brücke ist 104 m lang und 13,52 m hoch
 b) Die Brücke ist 100 m lang und 12 m hoch.
 c) Der Tunnel ist 11 m hoch und 10,5 m breit. Der waagrechte Abstand zur Tunnelwand ist 68 cm
 d) Die Kugeln fliegen 2 bzw. 20 Sekunden lang und erreichen eine Höhe von 5 bzw. 500 Metern.

Aufgabe 18: Parabelscharen und Ortskurven

- a) $x_{1/2} = \frac{t}{2} \pm \frac{t}{2}$ und $S_t\left(\frac{t}{2} \mid -\frac{t^2}{4}\right) \Rightarrow$ Ortskurve $y = -x^2$
 b) $x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{t-9}$, falls $t \neq 9$ und $S_t(-3 \mid -9+t) \Rightarrow$ Ortskurve $x = -3$
 c) $x_{1/2} = -\frac{t}{2} \pm \sqrt{\frac{t^2}{4} - 2}$, falls $t \neq \sqrt{8}$ und $S_t\left(-\frac{t}{2} \mid -\frac{t^2}{4} + 2\right) \Rightarrow$ Ortskurve $y = -x^2 + 2$
 d) $x_{1/2} = t \pm \sqrt{t^2 + 2t - 1}$, falls $t \leq -1 - \sqrt{2}$ oder $t \neq -1 + \sqrt{2}$ und $S_t(t \mid -t^2 - 2t + 1) \Rightarrow y = -x^2 - 2x + 1$
 e) $x_{1/2} = \frac{1}{t} \pm \sqrt{\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t} - 1\right)}$, falls $t \neq 1$ und $S_t\left(\frac{1}{t} \mid -\frac{1}{t} + 1\right)$, falls $t \geq 0 \Rightarrow$ Ortskurve $y = -x + 1$
 f) $x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{-t}$, falls $t \leq 0$ und $S_t(1 \mid -t) \Rightarrow$ Ortskurve $x = 1$
 g) $x_{1/2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{t}}$, falls $t \geq 0$ und $S_t(1 \mid -1) \Rightarrow$ keine Ortskurve, sondern gemeinsamer Scheitelpunkt
 h) $x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-t}$, falls $t \leq 1$ und $S_t(-1 \mid t-1) \Rightarrow$ Ortskurve $x = -1$

Aufgabe 19: Quadratische Gleichungen

- a) $L = \{-3\}$ b) $L = \{-10; 0\}$ c) $L = \{1; -1\}$ d) $L = \{1; 10\}$

Aufgabe 20: Quadratische Bruchgleichungen

- a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$ und $L = \{1; 2\}$ e) $D = \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$ und $L = \{0; 5\}$
 b) $D = \mathbb{R} \setminus \{1; -4\}$ und $L = \{ \}$ f) $D = \mathbb{R} \setminus \{6; -6\}$ und $L = \{ \}$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ und $L = \{6; 13\}$ g) $D = \mathbb{R} \setminus \{1; -2; 3\}$ und $L = \{ \}$
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{3; -3\}$ und $L = D$ h) $D = \mathbb{R} \setminus \{4; 3; 2\}$ und $L = \{ \}$

Aufgabe 21: Gemeinsame Punkte bei Kurvenscharen

- a) $x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} - t} \Rightarrow$ Schnittpunkte für $t < \frac{5}{4}$, Berührungspunkt für $t = \frac{5}{4}$, keine gem. Punkte für $t > \frac{5}{4}$
 b) $x_{1/2} = \frac{1}{2t} \pm \sqrt{\frac{1+4t}{4t^2}} \Rightarrow$ Schnittpunkte für $t > -\frac{1}{4}$, Berührungspunkt für $t = -\frac{1}{4}$, keine gem. Punkte für $t < -\frac{1}{4}$
 c) $x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1-2t}{4}} \Rightarrow$ Schnittpunkte für $t < \frac{1}{2}$, Berührungspunkt für $t = \frac{1}{2}$, keine gem. Punkte für $t > \frac{1}{2}$