Falsch: $\sqrt[3]{-8} = -2$, denn es gilt ja $(-2)^3 = -8$

Richtig: $\sqrt[3]{-8}$ ist im Reellen nicht definiert

(Stichwort: Permanenzprinzip)

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{8^2} = \sqrt[6]{8^2} = 8^{\frac{2}{6}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Auch ohne dritte Wurzeln bemühen zu müssen, lässt sich eine derartige Gleichungskette konstruieren:

$$-2 = (-2)^1 = (-2)^{\frac{2}{2}} = ((-2)^2)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{2 \cdot \frac{1}{2}} = ((-1)^2)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1$$

Der Grund: das Potenzgesetz $(a^r)^s = a^{rs}$ gilt nur für folgende Fälle:

1) für all $a \neq 0$ und beliebige ganze Zahlen r und s ; oder

2) für positive a und beliebige reelle Zahlen r und s .

Aber die vorstehende Regel $(a^r)^s = a^{rs}$ ist beispielsweise für $a = -1$, $r = 2$ und $s = \frac{1}{2}$ nicht anwendbar, obwohl keine undefinierten Ausdrücke auftreten.

Im **Komplexen** gilt: $\sqrt[3]{-8} = 1 + \sqrt{3} \cdot i$

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{3} \cdot i)^3 &= 1^3 + 3(\sqrt{3} \cdot i)^2 + 3\sqrt{3} \cdot i + (\sqrt{3} \cdot i)^3 \\ &= 1 + 3 \cdot 3 \cdot (-1) + 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} + (\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3} \cdot (\sqrt{-1})^2 \cdot \sqrt{-1} \\ &= 1 - 9 + 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} - 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} \\ &= -8 \end{aligned}$$

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = -1$$

Im Reellen gilt $\sqrt{a^2} = |a|$.

Im Reellen ist die Quadratwurzel aus -1 nicht definiert. Damit existiert der vierte Term $\sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{(-1)}$ gar nicht.

Im Komplexen gilt, dass das Ergebnis der Wurzel $\sqrt{a}$ die beiden Zahlen z und $-z$ sind, für die $z^2 = a$ und $(-z)^2 = a$ gilt.

Im Komplexen:

$$\pm 1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = (\pm i) \cdot (\pm i) = \pm i \cdot i = \pm (-1) = \mp 1$$